Mis Apuntes

Inverso multiplicativo de $z = x+iy$

$zz^{-1} = 1$ $\qquad z^{-1} = u+iv$ $\qquad \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$xu - yv + i(xv+yu) = 1$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \exists \text{ si } \det(M) \neq 0$$

Es decir $x^2+y^2 \neq 0$ (si $x^2+y^2=0$ si $x=0$ e $y=0$)
$z = 0+0i$
no tiene inverso

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{i(-y)}{x^2+y^2}$$

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ • $|z| = |\bar{z}|$ • $Im(iz) = Im(i(x+iy))$
$= Im(ix + i^2 y) = Im(-y+ix)$
$= x = Re(z)$

- $Re(iz) = Re(-y+ix) = -y = -Im z$

- $\overline{z \cdot w} = \overline{xu - yv + i(xv+yu)} = xu - yv - i(xv+yu)$
$= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} \frac{-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1/z$

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

- $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$
- $z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
- $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$
- $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

Dem

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$
$$\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

- $|z-w| \leq |z| + |w|$ ya que $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z| + |-w|$
- $|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$
- $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z+w|$ ya que: $|z| = |z+w-w|$

$$= |(z+w+(-w)| \leq \underbrace{|z+w| + |-w|}$$

o sea $|z| - |w| \leq |z+w|$

Similarmente $|w| - |z| \leq |z+w|$

$\Rightarrow \big|\,|w| - |z|\,\big| \leq |z+w|$

12) Notación

$n \in \mathbb{N} \,/\, z^{\frac{1}{n}} = \{ w \in \mathbb{C} \,/\, w^n = z \}$

Por ej = Hallar $(-1)^{1/4}$

$(-1)^{1/4} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^4 = -1 \}$

11) e)

$z^4 = -1$

$z = r e^{i\theta}$

$z^4 = -1$

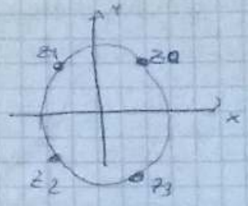
$r^4 e^{i4\theta} = 1 e^{i\pi}$

$r^4 = 1$

$4\theta = \pi + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow r = 1$

$\theta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ ;\ k = 0, 1, 2, 3$



$z_0 = e^{i\pi/4}$

$z_1 = e^{i3/4\pi}$

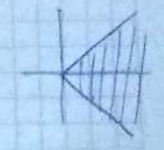
$z_2 = e^{i5/4\pi}$

$z_3 = e^{i7/4\pi}$

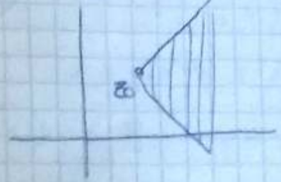
13)

1) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < \arg(z) < \pi/3 \}$

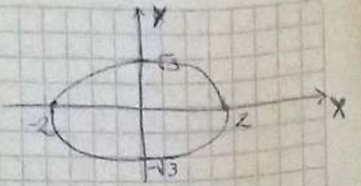
$\tilde{A}_1 = \{ z \,/\, |\operatorname{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{4} \}$



2) $A_2 = \{ z \,/\, |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \pi/4 \}$



$A_3 = \{ z / |z-1| + |z+1| = 4 \}$

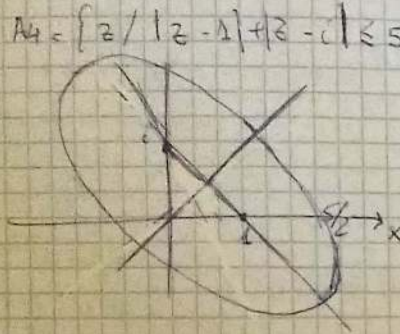


3/ DIST(z, 1) + DIST(z, -1) = 4

$|z_1 - z_2| = 2c$ E: $z \in \mathbb{C}$: DIST(z, z_1) + DIST$(z, z_2) = 2a$

con $\boxed{a > c}$ z_1, z_2: focos de la elipse

$A_4 = \{ z / |z-1| + |z-i| \leq 5 \}$

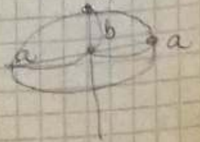


llamo

$2c = |z_1 - z_2|$

$c < a$

$b^2 = a^2 - c^2$



(3 c)

$\tilde{A} = \{ z / |z-i| = \text{Im}(z) + 1 \}$

Vemos que $z \in \tilde{A} \Rightarrow \text{Im}(z) \geq -1$

$z = x + iy$

$|x + i(y-1)| = \text{Im}(z) + 1$

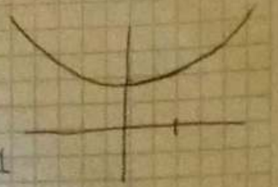
$|x + i(y-1)| = y + 1$, $y \geq -1$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y + 1$

$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$

$x^2 = 4y$ $y \geq -1$



Trabajo Práctico Nro. 1

Números Complejos

1. Comprobar que $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

2. Efectuar las operaciones indicadas:
   (a) $(\frac{1}{2} + i3) + (1 + i\frac{3}{4})$ (b) $(\frac{1}{3} + i) - (2 - i\frac{1}{4}) + (-\frac{5}{4} + i2)$ (c) $i\sqrt{2} + (1 + i\sqrt{2})$
   (d) $(2 - i\sqrt{32}).(2 + i\frac{3}{2})$ (e) $(i3).(i2).(-i)$ (f) $(3 + i4) : (5 - i2)$
   (g) $(i\frac{2}{3}) : (1 - i6)$ (h) $(1-i)^2$ (i) $(-i2)^7$

3. Determinar el módulo de cada una de las siguientes expresiones:
   (a) $2 + i\sqrt{5}$ (b) $\dfrac{(2 + i\sqrt{5})(1 + i)}{(2 - i4)}$

4. Hallar una representación trigonométrica de los siguientes números complejos:
   (a) $2 - i2$ (b) $i3$ (c) $-\sqrt{3} + i3$ (d) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
   y calcular el argumento principal de cada uno de ellos.

5. Expresar en forma binómica $(a + ib)$ los siguientes números complejos:
   (a) $2\,\text{cis}(3)$ (b) $2\,\text{cis}(\frac{19}{3}\pi)$ (c) $-\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}i}$ (d) $(\sqrt{3} + i)^6$

   notación: $\text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$

6. Verificar que $\dfrac{(1-i)^{49}(\cos(\frac{\pi}{40}) + i sen(\frac{\pi}{40}))^{10}}{(8i - 8\sqrt{3})^6} = -\sqrt{2}$

7. Siendo $w_1 = 1 + i$, $w_2 = i$ y $w_3 = -1 - i$, calcular $\text{Arg}(w_i)$, $\text{Arg}(w_i \cdot w_j)$ y $\text{Arg}(w_i / w_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$.

8. Probar que $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$ vale que:
   (a) $\text{Re}(kz) = k\,\text{Re}(z)$, $k \in \mathbb{R}$
   (b) $\text{Im}(z - w) = -\text{Im}\,(w - z)$
   (c) $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$
   (d) $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$
   (e) $\text{Re}(z \cdot w) = \text{Re}(\overline{z} \cdot \overline{w})$
   (f) $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w$
   (g) $\overline{iz} = -i\overline{z}$
   (h) $z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 2\,\text{Re}(z \cdot \overline{w}) = 2\,\text{Re}(\overline{z} \cdot w)$

◆ D abierto si todo punto de D es int a D

$\forall \bar{x} \in D \; \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset D$

$D \subset \mathbb{C}$ (Equiv: D es abierto $\Leftrightarrow FR(D) \cap D = \emptyset$)
z es pto front de D $\Rightarrow z \notin D$)

- z_0 es int a D si $\exists \, \varepsilon > 0 \, / \, B(z_0, \varepsilon) \subset D$

$B(z_0, \varepsilon) = \{ w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < \varepsilon$

- z_0 es ext a D si $\exists \, \varepsilon > 0 \, / \, B(z_0, \varepsilon) \subset D^c$

sii $B(z_0, \varepsilon) \cap D = \emptyset$

- z_0 es punto frontera de D sii $\forall \varepsilon > 0$:

$B(z_0, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \wedge B(z_0, \varepsilon) \cap D^c \neq \emptyset$

◆ D cerrado $\Leftrightarrow D^c$ es abierto

D cerrado si $\Leftrightarrow FR(D) \subset D$

◆ $D \subset \mathbb{C}$ es acotado $\exists M > 0 \, / \, D \subseteq B(0, M)$

1) una elipse

$FR(A) = A$; $INT(A) = \emptyset$

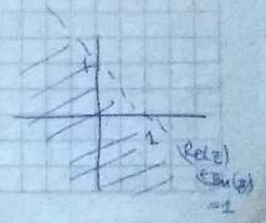
A no abierto, A sí cerrado

A acotado; $A \subset B(0, 5)$

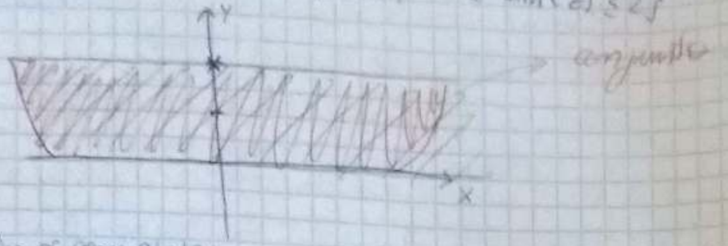
2)

ABIERTO, NO CERRADO, SÍ ACOTADO

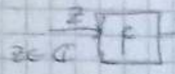
14-g) $A = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, Re(z) + Im(z) < 1 \}$



14-h) $\hat{A} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2i| \le 4 \,;\; 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 2\}$



Funciones complejas



$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

D dominio de f

$f(z) = w$

$f(x+iy) = u + iv \qquad u = \mathrm{Re}(f)$

$v = \mathrm{Im}(f)$

u, v dependen de x, y Son campos escalares en $\mathbb{R}^2$

$u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ejemplos

1) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

Dom f = $\mathbb{C}$

Re f = $u(x,y) = x^2 - y^2$

Im f = $v(x,y) = 2xy$

2) $f(z) = \bar{z} = x - iy = x + i(-y)$

Dom f = $\mathbb{C}$ Re f = x

Im f = −y

3) $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{(-y)}{x^2+y^2}$

Dom f = $\mathbb{C} - \{0\}$

Re f = $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ Dom u = $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Im f = $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ Dom v = $\mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$

4) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & z \ne 0 \\ 1+3i & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{(-y)}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 1+3i & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dom f = $\mathbb{C}$

$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 3 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5) $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k$

con $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

Dom f = $\mathbb{C}$

Re f =
Im f = }

6) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{\overline{z+1}}{|z+1|^2} = \dfrac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}$

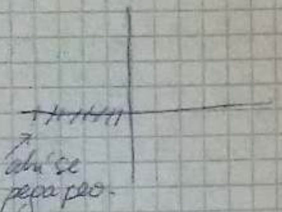
Dom $f = \mathbb{C} - \{-1\}$ $\quad = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - i\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

7) $f(z) = \text{Arg } z = u(x,y) + iv(x,y)$

Dom $f = \mathbb{C} - \{0\}$

$v(x,y) = 0$ Dom $u = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$$u(x,y) = \begin{cases} \text{arc tg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \text{arc tg}\frac{y}{x} + \pi & x \leq 0 \text{ o } y > 0 \\ \text{arc tg}\frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$$



Límite Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y sea z_0 un punto de acumulación de D

punto que está pegado a puntos del dominio

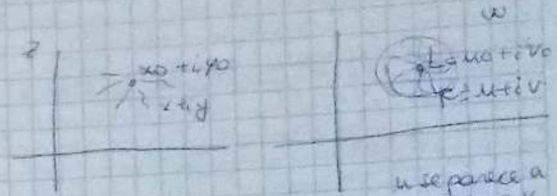
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ (*)

[z_0 es un punto de acumulación de un conj D a todo entorno de z_0 contiene puntos de D, distintos del z_0.]

Decimos que f tiende a L cuando z tiende a z_0, y lo denotamos (*)

Si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ / $0 \leq |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$
$z \in D$

Propiedades



u se parece a u0 y v0 a v si x~x0 e y~y0

- $z_0 = x_0 + iy_0$
  $L = u_0 + iv_0$,

  $z = x + iy$

  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

  $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L \iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$

  $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ sii $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) - L = 0$
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$ sii $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 0$
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$

  no vale la recíproca.

- vale el álgebra de límite
  - Si $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$

    $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + g(z) = L + M$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M$

- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

- Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ y $g(z)$ es acotada en un entorno de $z_0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = 0$

Def g es acotada en D si $\exists M / |g(z)| \leq M \ \forall z \in D$

Ejemplitos

a) $\lim_{z \to z_0} z = z_0$ b) $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$

c) $\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$ d) $\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$

e) $\lim_{z \to z_0} a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k = a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_k z_0^k$

ej

$$\lim_{z \to 3+i} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+i}{3-i} = (3+i)\frac{1}{3-i}$$

$$= (3+i) \cdot \frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2} = \frac{(3+i)^2}{10}$$

$$= \frac{9-1+6i}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} i$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x+iy)}{(x-iy)} \cdot \frac{(x+iy)}{(x+iy)}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^2 + 2xyi}{x^2 + y^2}$$

Tomando Re(z)

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ \nexists \rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} \ \nexists$$

con $y = 0$

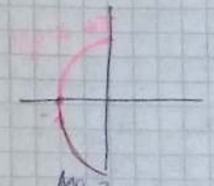
$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$

con $x = 0$

$\lim_{y \to 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$

$\neq$

g) $\lim_{z \to -1} \text{Ang } z \ \nexists$


Ang z → -π

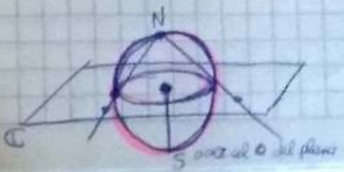
$\lim_{z \to i} \text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$

Punto infinito

Se define por sus entornos

→ un entorno del $\infty = \{ z \in \mathbb{C} / |z| > R \}$

Proyección estereográfica



$z = 0 \rightarrow S$

$|z| < 1 \rightarrow$ hemisferio sur

$|z| > 1 \rightarrow$ " norte

$|z| = 1 \rightarrow$ ecuador

$z = \infty \rightarrow N$

Limites ∞

Decimos que $\lim_{z \to \infty} f(z) = L$ sii dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ $R > 0 \,/\, |z| > R \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$

Equivalentemente

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$$

Decimos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ sii dado $R > 0$,

$\exists$ $\delta > 0 \,/\, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > R$

Equivalentemente

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Ej: $\lim_{z \to -2} \frac{1}{z+2} = \infty$ ya que $\lim_{z \to -2} \frac{1}{\left(\frac{1}{z+2}\right)}$

$= \lim_{z \to -2} z + 2 = 0$

Continuidad

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, D abierto

(así, z_0 es pto de acumulación del dominio)

f es continua en z_0 sii

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ $\exists$ y $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Valen reglas:

- si f y g son continuas en $z_0 \Rightarrow$
  $f+g$ es continua en z_0
  $f\,g$ " " "
  f/g " " "
- Si f es continua en z_0 y g es continua en $f(z_0)$
  $\Rightarrow h = g \circ f$ es continua en z_0

Ej
- $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$ es continua en todo z_0
- $f(z) = \operatorname{Arg} z$ es continua en $\mathbb{C} - \{ z \,/\, z = x, x \in \mathbb{R}, x \leq 0 \}$

- $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & z \neq 2i \\ 4i & z = 2i \end{cases}$

$f(2i) = 4i$

$$\lim_{z \to 2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i}$$

$$z^2 + 4 = z^2 - (-4) = z^2 - (2i)^2 = (z - 2i)(z + 2i)$$

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} z + 2i = 4i$$

$\Rightarrow f$ es continua también $2i$ $\therefore$ f es continua en $\mathbb{C}$

Derivabilidad en funciones complejas

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D abierto, $z_0 \in D$

Decimos que f es derivable en z_0 sii $\exists$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$ y en tal caso se la denota $\underbrace{f'(z_0)}_{\text{la derivada de } f \text{ en } z_0}$ o $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0$

Notación: $z = z_0 + \Delta z$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Ejemplos 1) $f(z) = z$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

$f'(z_0) = 1 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

2) $f(z) = z^2$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2 z_0 \Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2 z_0 \Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2 z_0$$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$(z^2)' = 2z$

3) $f(z) = |z|^2$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$

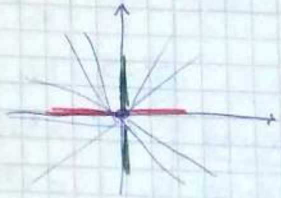
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) - z_0 \bar{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z_0 \bar{z_0}} + \bar{z_0} \Delta z + z_0 \overline{\Delta z} + \Delta z \overline{\Delta z} \cancel{- z_0 \bar{z_0}}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) \Delta z + z_0 \Delta \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z} (\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) + z_0 \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$$

Veamos $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$



$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

Si $\Delta x = 0$

Si $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} : \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y i}{\Delta y i} = -1$$

Si $\Delta y = 0$

$$: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Luego, $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \not\exists$

Luego si $z_0 \neq 0$, $f'(z_0) \nexists$

Si $z_0 = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{0 + \Delta \bar{z} + 0 \cdot \Delta \bar{z}}{\Delta z} = 0$

4) $f(z) = \bar{z}$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\bar{z}_0 + \Delta \bar{z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} \nexists$$

Reglas de derivación

- $c' = 0$ (c cte)
- $(z^n)' = n z^{n-1}$
- $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$
- $(f(z) g(z))' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$
- $(c f(z))' = c f'(z)$
- Regla de la cadena

$f(z) = x^2 + i y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$ $\rightarrow$ $z_0 = x_0 + i y_0$, $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + i(y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + i y_0^2)}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x + i 2 y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y i^2}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x + 2i y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y i^2}{\Delta x + i \Delta y} \cdot \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x - i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x^2 - i 2 x_0 \Delta x \Delta y + i 2 y_0 \Delta y \Delta x + 2y_0 \Delta y^2 + \Delta x^3 - i \Delta x^2 \Delta y + i \Delta y^2 \Delta x +}{\Delta x^3 + \Delta y^2}$$

\boxed{\text{por acá no sale}}

$x^2 + i y^2$

$= x^2 + (i)(-y^2)$

$= x^2 + (-i)(-y^2)$

$z = (x + iy)$

$\bar{z} = (x - iy)$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + iyx - iyx + (-i) i y^2$

$= x^2 - i y^2$

$\bar{z} \cdot \bar{z} = (x - iy)(x - iy)$

$x^2 + i^2 y^2 - iyx - iyx$

$= x^2 - y^2 - 2yxi$

no, tampoco

Si $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y_0 \Delta y^2 + \Delta y^3}{\Delta y^2} = 2y_0$$

Si $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x^2} = 2x_0$$

Si $2y_0 \neq 2x_0$ $\nexists f'(z_0)$

Si $x_0 = y_0$:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0(\Delta x^2 + \Delta y^2) + \Delta x^3 + \Delta y^3 - i(\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^2 \Delta x)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} 2x_0 + \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y} + \frac{\Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - i \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta y + i \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta x$$

f es derivable en los puntos de la forma $z_0 = x_0 + i y_0$ y su derivada vale $f'(z_0) = 2x_0$

\boxed{\text{Hasta el 9 de la guía 2}}

---

1)

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{1 + 2i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{|3 + 4i|^2} = \frac{-5 + 10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$$

$+$

$$\frac{2 - i}{5i} = \frac{2 - i}{5i} \cdot \frac{-5i}{-5i} = \frac{(2 - i)(-5i)}{|5i|^2} = \frac{-10i - 5}{25} = -\frac{2}{5} i - \frac{1}{5}$$

$-\frac{2}{5}$ i

2) h) $(1 - i)^2 = (1 - i)(1 - i) = 1 - i - i - 1 = -2i$

$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = a^2 + abi + abi - b^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

i) $(-i 2)^7 = 2^7 (-i)^7 = -2^7 (i)^7 = -2^7 i^2 i^2 i^2 = -2^7 \cdot (-1)(-1)(-1) = 2^7$

$i \quad \hookrightarrow = -2^7 (i^1)^3 i$

3)

a) $\sqrt{Re^2(z)+Im(z)^2} = \sqrt{2^2+5} = 3$

b) $\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i)}{2-i4} = \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i)}{(2-4i)}\frac{(2+4i)}{(2+4i)} = \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i)\,2(1+2i)}{|2+4i|^2}$

$= \frac{(2+2i+\sqrt{5}i-\sqrt{5})(2+4i)}{4+16} = \frac{((2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{5})i)(2+4i)}{20}$

$= \frac{2(2-\sqrt{5})+4i(2-\sqrt{5})+2(2+\sqrt{5})i+4i(2+\sqrt{5})i}{\sqrt{20}}$

$= \frac{2(2-\sqrt{5})+8i-4\sqrt{5}i+8i+2\sqrt{5}i-8-4\sqrt{5}}{20}$

$= \frac{4-2\sqrt{5}+8i-4\sqrt{5}i+8i+2\sqrt{5}i-8-4\sqrt{5}}{20}$

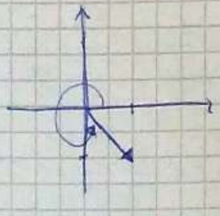
$= \frac{-4-6\sqrt{5}+16i-2\sqrt{5}i}{20} = \frac{(-4-6\sqrt{5})+(16-2\sqrt{5})i}{20}$

$= \frac{-2-6\sqrt{5}}{10} + \frac{8-\sqrt{5}}{10}i$

$\sqrt{\left(\frac{-2-6\sqrt{5}}{10}\right)^2+\left(\frac{8-\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

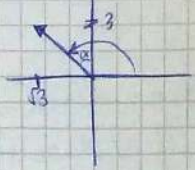
4) a) $2-2i$

$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)$
$+ i\,2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{8}\pi\right)$



b) $3i$
$= 3i\,\mathrm{sen}(\pi/2)$
$+ 3\cos(\pi/2)$

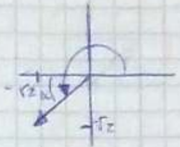
c) $-\sqrt{3}+i3$
$= 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$
$+ 2\sqrt{3}i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{12}\pi\right)$



$tg(\alpha) = \frac{0}{A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

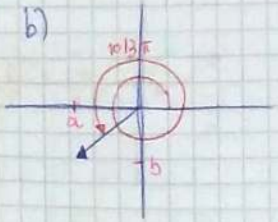
$\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{12}$

d)



$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + i\,2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)$

5) b)



$\frac{10}{3}\pi = 2\pi -$ algo
$= 2\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$
$= 3\pi + \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{a^2+b^2} = 2$

$arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\frac{b}{a} = \sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}a$

$\boxed{-1-\sqrt{3}i}$

$\sqrt{a^2+3a^2} = 2$

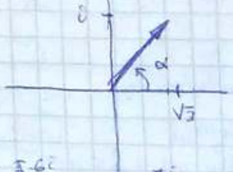
$\sqrt{4a^2} = 2$

$2|a| = 2$

$|a| = 1 \rightarrow \boxed{a=-1 \quad b=-\sqrt{3}}$

d) $z^6 = (z^2)^2 z^2 \Rightarrow$ es muy horrible.

$\sqrt{3}+i = 2e^{\pi/6 i}$



$\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$|\sqrt{3}+i| = 2$

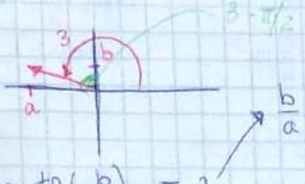
$(\sqrt{3}+i)^6 = (2e^{\pi/6 i})^6$
$= 2^6(e^{\pi/6 i})^6 = 2^6 e^{\frac{\pi}{6}\cdot 6i} = 2^6 e^{\pi i}$

$\Rightarrow z = 2^6 cis(\pi)$

d) $2\,cis(3) = 2e^{3i}$

$\sqrt{a^2+b^2} = 2$

$tg\left(\frac{a}{b}\right) = 3-\pi/2$



o $tg\left(\frac{b}{a}\right) = \pi - 3$

0,2786

$b = a\,arctg(\pi-3)$

$\frac{b}{a} = 0,1407$

$|a| = 1,9805$

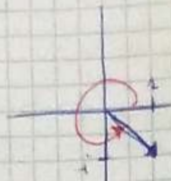
$a = -1,98$

$\sqrt{a^2+(a\,arctg(\pi-3))^2} = 2$

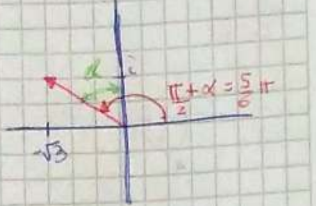
$|a|\sqrt{1+arctg(\pi-3)^2} = 2$

6) $$\frac{(1-i)^{49}\left(\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{40}\right)\right)^{10}}{(8i-8\sqrt{3})^{6}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}\right)^{49}\left(1e^{\frac{\pi}{40}i}\right)^{10}}{8^6(i-\sqrt{3})^6}$$



$$=\frac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{\frac{7}{4}\cdot 49\pi i}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}{8^6\left(2e^{\frac{5}{6}\pi i}\right)^6}$$



$tg(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{1}$

$$=\frac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{86\pi i}}{\left(\left((\sqrt{2})^6\right)^6\left((\sqrt{2})^2\right)^6 e^{5\pi i}\right)}$$

$\alpha=\pi/3$

$$=\frac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{86\pi i}}{(\sqrt{2})^{36}(\sqrt{2})^{12}\,e^{5\pi i}}=(\sqrt{2})\,e^{81\pi i}=\sqrt{2}\,e^{(\overbrace{80\pi}^{2\cdot 40\pi}+\overbrace{\pi}^{2\cdot\frac{1}{2}\pi})i}$$

son 40 vueltas el plano y media vuelta.

$$\Rightarrow=\sqrt{2}\,e^{\pi i}$$
$$=-\sqrt{2}$$

⑦ Props de los argumentos ⟶

$\mathrm{Arg}(w_1 w_2)\overset{\text{en gral}}{\neq}\mathrm{Arg}\,w_1+\mathrm{Arg}\,w_2$ $\boxed{\text{prop}}$

$\mathrm{Arg}(1+i)=\pi/4$
$\mathrm{Arg}(i)=\pi/2$
$\mathrm{Arg}(-1-i)=\frac{5}{4}\pi$

$\mathrm{Arg}((1+i)\,i)=\mathrm{Arg}(-1+i)=\frac{3}{4}\pi$

$z-z=0$

$\mathrm{Arg}((1+i)(1-i))=\mathrm{Arg}(-(1+i)^2)$
$\quad\parallel$
$\mathrm{Arg}(-2i)\quad=\mathrm{Arg}(-(\sqrt{2}\,e^{\pi/4 i})^2)$
$=\mathrm{Arg}(-\underbrace{2}_{2}\,e^{\frac{\pi}{2}i})=\mathrm{Arg}(-z)$
$=\mathrm{Arg}(2e^{\pi/2 i}\cdot e^{\pi i})=\mathrm{Arg}(2e^{3/2\pi})$
$=3/2\pi$

8)

a) $K(\overbrace{a+bi}^{z})=ka+kbi$
$\mathrm{Re}(k(a+bi))=ka$
$K\,\mathrm{Re}(a+bi)=ka$

b) $\mathrm{Im}(z-w)=-\mathrm{Im}(w-z)$
$\mathrm{Im}((a+bi)-(c+di))=-\mathrm{Im}(c+di-(a+bi))$
$\mathrm{Im}((a-c)+(b-d)i)=-\mathrm{Im}((c-a)+(d-b)i)$
$b-d=-(d-b)=b-d$

c) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Im}(i(a+bi))$
$=\mathrm{Im}(ai-b)=a=\mathrm{Re}(z)$

d) $\mathrm{Re}(iz)=\mathrm{Re}(ai-b)=-b=-\mathrm{Im}(z)$

e) $\mathrm{Re}(zw)=(a+bi)(c+di)$
$\overset{\mathrm{Re}}{=}(ac+adi+bci-bd)=ac-bd$
$\mathrm{Re}(\bar{z}\bar{w})=(a-bi)(c-di)$
$\overset{\mathrm{Re}}{=}(ac-dai-bci-bd)=ac-bd$

f) $\overline{z\bar{w}}=\bar{z}w$
$\downarrow$
$\overline{(a+bi)(c-di)}=\overline{ac+bci-adi+bd}$
$=ac+bd-bci+adi$
$\bar{z}w=(a-bi)(c+di)$
$=ac+adi-bci+bd$

g) $\overline{iz}=-i\bar{z}$
$\overline{i(a+bi)}=-i(a-bi)$
$\overline{ai-b}=-(ai+b)$
$-b-ai=-ai-b$

h) $z\bar{w}+\bar{z}w=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$
$=\underbrace{(ac+bd+bci-adi)}_{z\bar{w}}+\underbrace{(ac+adi-bci+bd)}_{\bar{z}w}$
$=2(ac+bd)$
$2\mathrm{Re}(z\bar{w})\overset{\mathrm{Re}}{=}2(ac+bd+bci-adi)=2(ac+bd)=2\mathrm{Re}(\bar{z}w)$
$=2\mathrm{Re}(ac+bd-bci+adi)$
$=2(ac+bd)$

i) $\mathrm{Im}(z+w)=0$
$\Updownarrow$
$\mathrm{Im}((a+b)+(c+d)i)\overset{=c+d}{=}0$ $\rightarrow$ $\boxed{c=-d}$ (1)
$\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}((a+b)+(c+d)i)=a+b=2\mathrm{Re}(a+bi)=2a$
$\boxed{b=a}$ (2)
$\overset{(1)(2)}{\Longleftrightarrow}\ z=\bar{w}$

j) $Re(z) > 0$

$Re(a+bi) > 0$ $\Rightarrow$ $Re\left(\frac{1}{a+bi}\right) = Re\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = Re\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{a > 0}$

$= \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{a} \geq 0$

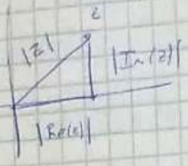
$a > 0$

Y ocurre lo mismo para el otro lado

k) $|z|\sqrt{2} \geq |Re(z)| + |Im(z)|$

$\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{2} \geq |a| + |b|$

$\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$



x desigualdad triangular

$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|$

$v_1 = Re(z)$
$v_2 = Im(z)$ $\Big\}$ $v_1 \perp v_2$ (p.e.)

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$z = v_1 + v_2$

$\langle z, z\rangle = \langle v_1+v_2, v_1+v_2\rangle = \langle v_1, v_1+v_2\rangle + \langle v_2, v_1+v_2\rangle$

$= \langle v_1, v_1\rangle + \cancel{\langle v_1, v_2\rangle} + \cancel{\langle v_2, v_1\rangle} + \langle v_2, v_2\rangle$

$= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

$2(a^2+b^2) = 2(a+b)(a-b)$

a) $\overline{a+bi+c+di} = a+c-(b+d)i$

$\overline{a+bi} + \overline{c+di} = a-bi+c-di$ $\Big\} =$

c) $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac+dai+bci-db} = (ac+(-db)) - (da+bc)i$

$\overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = ac - bic - dai - db$ $\Big\} =$

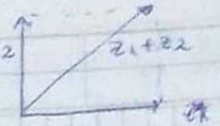
h) $z - \bar{z} = i2Im(z)$

$(a+bi) - (a-bi) = 2bi$

k) $|Re(z)| \leq |z|$

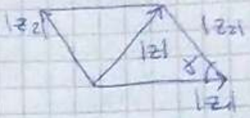
$|a| \leq |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}$



m) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|(a+c)+(b+d)i| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$



$|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2| \leq |z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

$\parallel$

$(|z_1|-|z_2|)^2$ $\qquad = (|z_1|+|z_2|)^2$

$|z|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\gamma)$

$\cos(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = \pi/2$
$\Rightarrow z_1 \perp z_2$

$\cos(\gamma) = 1 \Rightarrow \gamma = 0$
$\Rightarrow z_1 \parallel z_2\ (+)$ $\rightrightarrows$

$\cos\gamma = -1 \Rightarrow \gamma = \pi$
$\Rightarrow z_1 \parallel z_2\ (-)$ $\xrightarrow{z_1}$ $\xleftarrow{z_2}$

n) a) $z^2 = 2i$

$\downarrow$

$r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\pi/2} \longleftrightarrow 2\theta = \pi/2 + 2k\pi \rightarrow k = 0, 1$

$\updownarrow$ $\qquad \Updownarrow$

$r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i5/4\pi}$

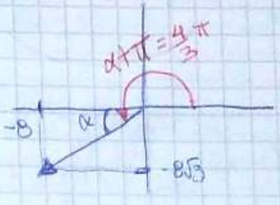
d) $z^4 = -8-8\sqrt{3}i$

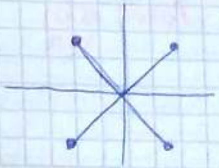
$z^4 = 16e^{i4/3\pi}$ $\qquad r^4 = 16 \rightarrow \boxed{r = 2}$

$r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i4/3\pi}$ $\qquad 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in [0,3],\ k \in \mathbb{N}$

$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi$

$z_0 = 2e^{i\pi/3}$ $\quad z_2 = 2e^{i4/3\pi}$
$z_1 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}$ $\quad z_3 = 2e^{i11/6\pi}$





$tg\,\alpha = \frac{-8\sqrt{3}}{-8}$

$tg\,\alpha = \sqrt{3}$

$\boxed{\alpha = \pi/3}$

13) b) $\arg(z-z_0) = \alpha$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$

d) $|z - z_1| = |z - z_2|$

e) $z = 1$

$|1-1| + |1+1| = 2$
$|2| = 2$

chequeo ⇒ ∈ elipse, idem $z = -1$

$d(1,1) + d(1,-1) = 2a$

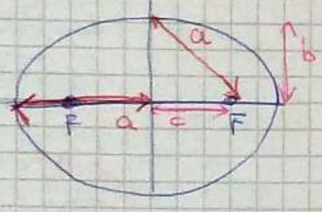
$0 + 2 = 2a$

$\Downarrow$

$\boxed{a = 1}$

$c^2 = a^2 - b^2$

también me da $b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$



se cumple ∀

$z / -1 \leq \text{Re}(z) \leq 1$, $\text{Im}(z) \neq 0$

Puede estar mal

e) $|z-1| + |z+1| = a$,
$a > 2$

$|a+bi-1| + |a+bi+1| = 2$

$\sqrt{(a-1)^2+b^2} + \sqrt{(a+1)^2+b^2} = 2$

si $a = 0$

$\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+b^2} = 2$

$2\sqrt{1+b^2} = 2$

$\sqrt{1+b^2} = 1$

$1 + b^2 = 1$

¿$b^2 = 0$? no.

$|z_1 - z_2| = 2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$

$|1-(-1)| = 2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$

$2 = 2c$

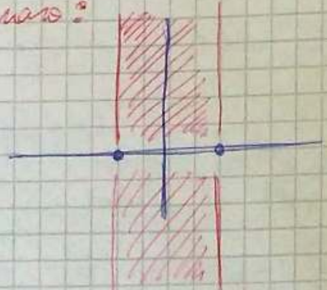
$\boxed{c = 1}$

$\sqrt{a^2-b^2} = 1$

dist$(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

a le =

Fijarse que el (0,0) pertenece, no es una elipse, es algo raro:



① a) $f(z) = z^2 = (\overset{x}{a} + \overset{y}{b}i)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$u(x,y) = \text{Re}\, f = x^2 - y^2$

$v(x,y) = \text{Im}\, f = 2xy$

b) $f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1} = 2z\bar{z} - \frac{3i}{z-1} \overset{⊛}{=} 2|z|^2 - \frac{3i(z+1)}{(z+1)(z-1)}$

$f(z) = 2z\bar{z} - \frac{3i(z+1)}{z^2-1} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i(x+iy+1)}{(x+iy)^2-1}$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{(3ix+y^2+3i)}{(x+iy)^2-1} = 2(x^2+y^2) - \frac{(3ix+y^2+3i)}{x^2-y^2+2xyi-1}$

$F(x,y) = 2(x^2+y^2) - \left[\frac{3ix}{(x^2-y^2+2xyi-1)} + \frac{y^2}{x^2-y^2+2xyi-1} + \frac{3i}{x^2-y^2+2xyi-1}\right]$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) \frac{-3ix}{(x^2-y^2+2xyi-1)} \cdot \frac{(x^2-y^2-2xyi-1)}{(x^2-y^2-2xyi-1)} + \ldots$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{[3ix + y^2 + \cancel{y} + 3i](x^2-y^2-1-2xyi)}{(x^2-y^2-1)^2 + (2xy)^2}$

mucho lío, vuelvo a ⊛

$f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1} = f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{3i}{(x+yi-1)} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i}{(x-1)+yi}$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{3i((x-1)-yi)}{(x-1)^2+y^2} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i(x-1)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$

$u(x,y) = \text{Re}\, f = 2(x^2+y^2) - \frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$

$v(x,y) = \text{Im}\, f = \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

d) $f(z) = \frac{z-i}{z+1} \overset{f(x,y)}{=} \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{(x+1)+iy} = \frac{[x+i(y-1)]((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2}$

$= \frac{x(x+1) - iyx + i(y-1)(x+1) + y(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f = \frac{x(x+1)+y(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$ $\quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f = \frac{-yx+(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$

② a) $f(z) = z^2 + i2z$ $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$

b) $f(z) = \frac{y}{x} + i\frac{1}{1-y}$ $\mathrm{Dom}\, f$ → $\mathrm{Dom}\, u = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ → $\mathrm{Dom}\, v = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ $\quad D_o f = \mathbb{C} - \{(0,y)\} - \{(1,x), x \in$

c) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ $\mathrm{Dom}\, f$ → $\mathrm{Dom}\, u = \mathbb{R}^2$ → $\mathrm{Dom}\, v = \mathbb{R}^2 - \{$ $\quad D_o f = \mathbb{C} - \{i, -i\}$

d) $f(z) = \frac{z}{\bar z - i} = f(x,y) = \frac{x+yi}{x-yi-i} = \frac{x+yi}{x+i(-1-y)}$

$= \frac{(x+yi)(x-i(-1-y))}{x^2+(-1-y)^2} = \frac{(x+yi)(x+i(1+y))}{x^2+(1+y)^2}$

$= \frac{x^2+i(1+y)x+iyx-y(1+y)}{x^2+(1+y)^2}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C} - \{-i\}$

e) $f(z) = \frac{1}{1-|\underset{x}{\underset{\uparrow}{a}}+\underset{y}{\underset{\uparrow}{b}}i|} = \frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C} - \{z / z = x+yi;\ x^2+y^2=1\}$

③ a) $\lim_{z\to 2+3i} \underbrace{(z-5i)^2}_{\to (2-2i)^2} = (2-2i)^2 = -8i$

b) $\lim_{z\to 2} \frac{z^2+3}{iz} = \lim_{z\to 2} \underbrace{\frac{(z^2+3)(-iz)}{z}}_{\to \frac{(4+3)(-i2)}{2}} = -7i$

c) $\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = \lim_{z\to 1} (z+1)\frac{(z-1)}{(z-1)} = 2$

d) $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar z}$ $\quad z = x+yi$

Si $x\to 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar z} : \lim_{x\to 0}\frac{yi}{-yi} = -1$

Si $y\to 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar z} : \lim_{y\to 0}\frac{x}{x} = 1$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar z}$

e) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar z^2}{z} = \lim_{z\to 0} \bar z \cdot \frac{\bar z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\bar z^3}{|z|^2}$ → lio

$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$ veo s da 0

$\lim_{z\to 0} \left|\frac{\bar z^2}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|\bar z|^2}{|z|} = \lim_{z\to 0}|z| = 0 = \lim_{z\to 0}\frac{\bar z^2}{z}$

es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$

f) $\lim_{z\to 0} \frac{(\bar z)^2}{z^2}$ $\quad z = x+yi$

$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar z}{z}\right)^2 : \lim_{x\to 0}\left(\frac{-yi}{yi}\right)^2 = 1$

$\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^2 = 1$ ñ NO

$\frac{\bar z^2}{z}\cdot\frac{z^2}{z^2} = \frac{(\bar z z)^2}{z^3} = \frac{|z|^{2^2}}{z^3}$

$\lim_{z\to 0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0}|f(z)| = 0$

$\lim_{z\to 0}\left|\left(\frac{\bar z}{z}\right)^2\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|\bar z|^2}{|z|^2} = 1$ ñ No

$z = re^{i\theta}$, $\bar z = re^{-i\theta}$

$\lim_{z\to 0}\frac{\bar z^2}{z^2} = \lim_{r\to 0}\frac{(re^{-i\theta})^2}{(re^{i\theta})^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}e^{-2\theta i}}{\cancel{r^2}\underbrace{e^{i2\theta}}} = e^{-4\theta i}$ no vale lo mismo $\forall\theta \Rightarrow \nexists \lim$.

$z = re^{i\theta}$, $r\to 0$

1) $\theta = 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = e^{-4\theta i} = 1$

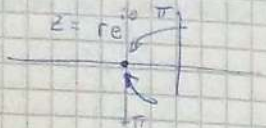
2) $\theta = \pi/4 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = e^{-4\pi/4 i} = -1$

$\nexists \lim$

$x<0$ $y\geq0$	$x\geq0$ $y\geq0$
$x<0$ $y<0$	$x\geq0$ $y<0$

6) $f(z) = \text{arctan2}(y,x) = \begin{cases} \text{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) & x\geq0,\ y\geq0 \quad ① \\ \text{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)+\pi & x<0,\ y\geq0 \quad ② \\ \text{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)-\pi & x\geq0,\ y<0 \quad ④ \\ [illegible]\ \frac{\pi}{2} & x\geq0,\ y\geq0 \end{cases}$

$-\pi/2$ $x<0$, $y<0$

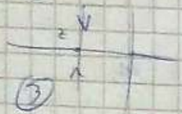


$z = re^{i\theta}$

$\lim\limits_{\theta\to-\pi} \text{Arg}(re^{i\theta}) = -\pi$

$\lim\limits_{\theta\to\pi} \text{Arg}(re^{i\theta}) = \pi$ $\Big\} \not\exists$

②



③

2° cuad

$\text{Arg}(z) = \pi - \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$

$\lim\limits_{y\to0^+} \text{Arg}(x+iy) = \lim\limits_{y\to0} \pi - \underbrace{\text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)}_{\to 0} = \pi$

$\lim\limits_{y\to0^-} \text{Arg}(x+iy) = \lim\limits_{y\to0} -\pi + \underbrace{\text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)}_{\to 0} = -\pi$ $\Big\} \ \textcircled{\not\exists}$

3° cuad

$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$

⑦

$f(-1) = 1$

$\lim\limits_{z\to-1} f(z)$ por la circunf. $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$= \lim\limits_{\theta\to\pi} f(e^{i\theta}) = 1$

por otro camino $\neq C_1$ $(|z| \neq 1)$

$\lim\limits_{z\to-1} f(z) = \lim\limits_{z\to-1} (z^2+z+1) = 1$

Deberíamos probar: Dado $\varepsilon>0$, busco $\delta>0 / |z+1| < \delta \Rightarrow |f(z)-1| < \varepsilon$

8) $f(z)$ es continua en un conj abierto $D(\ldots)$

- $|f(z)|$ f, $|\,|$ cont
- $\bar{f}(z)$ f, cont, conj cont.
- $\frac{1}{f(z)}$ $\rightarrow$ cont $\forall z \in D / f(z) \neq 0$
- $f(\bar{z})$

puede pasar que $z \in D$
$\bar{z} \notin D$

- Ahora $z \in D$, $\bar{z_0} \in D$
f cont en z_0 $g(z) = f(\bar{z})$
$\Downarrow$
g cont en z_0

9) f es discont en z_0
g " " " z_0

$f+g$ es discont en z_0? No neces.

$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z\neq0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ f discont en $z=0$

$g(z) = -f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{z} & z\neq0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ es discont en $z=0$

$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ $f+g$ cont en $z=0$

$f\,g$ es discont en z_0? No neces.

$$f(z)=\begin{cases} 1/z & z\neq 0 \\ 1 & z=0 \end{cases} \qquad f \text{ y } g \text{ discont en } z=0$$

$$(f\cdot g)(z)=f(z)\,g(z)=1 \quad \forall z\in\mathbb{R}$$

$f\,g$ cont en $z=0$

Derivabilidad de $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
(D abierto)

Recordar concepto diferenc. de campos escalares en $\mathbb{R}$

$u: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, u abierto, $(x_0,y_0)\in D$

u es diferenciable en (x_0,y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-u'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-u'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Sea $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, D abierto, f derivable en $z_0=x_0+iy_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right|=0$$

$f'(z_0)=a+bi$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left|\frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)-(a+bi)(x-x_0+i(y-y_0))}{x-x_0+i(y-y_0)}\right|=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{|u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)+i(v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0))|}{|x-x_0+i(y-y_0)|}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

sii u y v diferenciables en (x_0,y_0)

y $a=u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)$

$b=-u'_y(x_0,y_0)=v'_x(x_0,y_0)$

$f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, D abierto, $z_0\in D$ $\quad z_0=x_0+iy_0$, $f=u+iv$

f es derivable en z_0 sii

- u y v son diferenciables en (x_0,y_0)

Condiciones de Cauchy Riemann
- $u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)$
- $u'_y(x_0,y_0)=-v'_x(x_0,y_0)$

Ej $f(z)=x^2+iy^2$

$u(x,y)=x^2 \quad v(x,y)=y^2$

u, v dif en $\mathbb{R}^2$

- C-R $\quad \partial u/\partial x=2x \quad \partial v/\partial y=2y$

$\partial u/\partial y=0 \quad 2x=2y$

$\partial v/\partial x=0 \quad 0=0$

Luego f es derivable en puntos

$z = x + ix$

$f'(z) = f'(x+ix) = u'_x(x,x) + i V'_x(x,x) = 2x + i0$

10 d) $f(z) = \mathrm{Im}(z) = y + i0$

$u(x,y) = y$

$V(x,y) = 0$

- u y V son dif en $\mathbb{R}^2$ $\quad u'_x = V'_y$ $\quad u'_y = -V'_x$
  $\quad \underset{0}{} = \underset{0}{}$ $\quad \underset{1}{} = \underset{-0}{}$

- C-R $\quad u'x = 0 \quad u'y = 1 \quad V'x = 0 \quad V'y = 0$

no se verifica en ningún punto $\Rightarrow$ f no es derivable en ningún punto.

- $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} + i0$ $\qquad (x, y, z)$ $\quad z = u(x,y)$ $\quad z = \sqrt{x^2+y^2}$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dif en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ $\quad \boxed{z^2 = x^2+y^2}$ $z \geq 0$

$V(x,y) = 0$ dif en $\mathbb{R}^2$

- C-R $\quad u'x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad V'x = 0$

$u'y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad V'y = 0$

no se verifica C-R en ningún punto $\Rightarrow$ $|z|$ no es deriv en ningún z.

Existen funciones $f = u + iV$ que verifican C-R, pero f no es derivable (Prob 12)

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$u'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x}$

$u'_x(1,0) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{u(x,0) - u(1,0)}{x-1}$

$\underline{\lim}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(1+h,0) - u(1,0)}{h}$

$u'x(0,0)$
$\shortparallel$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(f(x,0)) - \mathrm{Re}(f(0,0))}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x} = 1$

$u'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(f(0+iy)) - \mathrm{Re}(f(0+0i))}{y}$

Anexo

$f(x+0i) = \dfrac{x^2}{x} = x \qquad f(0+iy) = \dfrac{\overline{iy}}{iy} = \dfrac{(-iy)^2}{iy} = \dfrac{-y^2}{iy} = iy$

$u'y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0$

$V'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{V(x,0) - V(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Im}(f(\underset{+i0}{x})) - \mathrm{Im}(f(0+0i))}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

$V'y(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{V(0,y) - V(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\mathrm{Im}(f(0+iy)) - \mathrm{Im}(f(0+0i))}{y}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y-0}{y} = 1$

Se verifica C-R en (0,0): $u'_x(0,0) = V'_y(0,0)$

$u'_y(0,0) = -V'_x(0,0)$

Pero f no es derivable en $z = 0$

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\frac{\bar{z}^2}{z} - 0}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2 \nexists$

u y V no son diferenciables en (0,0)

Holomorfa

- f es holomorfa en z0 si $f'(z)$ $\exists$ en un entorno de z0.

- f es holomorfa en un abierto D si f es holomorfa en cada punto de D
  y denotamos: $f \in H(D)$
- z_0 es un punto singular si f no es holomorfa en z.
- f es "entera" si $f \in H(\mathbb{C})$

Ej) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ Dom $f = \mathbb{C} - \{i, -i\}$

f es continua en su dominio por ser cociente de continuas

$g(z) = z^2+1$

$g'(z) = 2z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

f es derivable en su dominio

$\Rightarrow \exists f' - \{i, -i\}$ $\qquad$ i y $-i$ son puntos sing de f

f holomorfa en su dominio. $\qquad$ cociente de holom es holom si no se anula el denominador

Propiedad

f y $g \in H(D) \Rightarrow$

$f+g \in H(D)$

$f \cdot g \in H(D)$

$\frac{f}{g} \in H(D)$ excepto en los puntos que se anulan g

Conexión

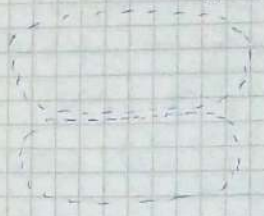
- Conjuntos conexos
  Si no se puede cubrir por 2 abiertos disjuntos / c/u contenga puntos de D
- Conj conexo por curvas: Si cualesquiera 2 puntos se pueden unir por una curva totalmente contenida en el conjunto

Si D es abierto

D es conexo sii D es conexo por curvas.

(21) a) abiertos conexos: recinto

$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\} = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$



no conexo porque se puede cubrir por 2 abiertos

$B_1 = \{z / \operatorname{Im} z > 0\}$

$B_2 = \{z / \operatorname{Im} z < 0\}$

$A \subset B_1 \cup B_2$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

A es abierto
A no es conexo x curvas
$\Rightarrow$ A no es conexo

$A = \{z / 0 < |z-1| < 2\} \to$ abierto $\quad \to$ conexo
conexo x curvas

(21) b) Si $f(z) = $ cte en D, D abierto $\Rightarrow f'(z) = 0$

Si $f'(z) = 0$ en D abierto $\Rightarrow f(z) = $ cte en D?

Si D es conexo, es cierto

Si D no es conexo, no necesariamente

Ej Si $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -1 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

Dom $f = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \neq 0\} \to$ no conexo

f derivable en su dominio, $\qquad f'(z) = 0 \ \forall z \in \text{Dom } f$

$f'(z) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$ $\qquad$ y f no cte

Derivabilidad en polares

$f(z) = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{\rho} \,\text{sen} \frac{\theta}{2}$

$f(z) = U(\rho, \theta) + i V(\rho, \theta)$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$
$$= u(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) + i v(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$$
$$= U(\rho, \theta) + i V(\rho, \theta)$$

θ se mueve en un período de amplitud 2π

u, v dif sii U, V dif $(\rho > 0)$

(1)(3) $U'_\rho = u'_x \cdot x'_\rho + u'_y \cdot y'_\rho = u'_x \cos\theta + u'_y \,\text{sen}\,\theta$

(2)(4) $U'_\theta = u'_x \cdot x'_\theta + u'_y \cdot y'_\theta = u'_x(-\rho \,\text{sen}\,\theta) + u'_y\, \rho \cos\theta$

idem con los V's

Aplicando C-R:

1) $U'_\rho = V'_y \cos\theta - V'_x \,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\rho} V'_\theta$

2) $U'_\theta = V'_y(-\rho \,\text{sen}\,\theta) + (-V'_x)\rho\cos\theta = -\rho V'_\rho$

$\boxed{\text{CR en polares}}$

$U'_\rho = \frac{1}{\rho} V'_\theta$

$U'_\theta = -\rho V'_\rho$

¿Y cómo hacemos para hallar $f'(z)$?

$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y)$

~~[illegible]~~

Hacemos (1) $\cdot \cos(\theta)$ - (2) $\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}$:

$U'_\rho \cos\theta - U'_\theta \frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = u'_x \cos^2\theta + u'_y \,\text{sen}\,\theta\cos\theta$
$+ u'_x \text{sen}^2\theta - u'_y \,\text{sen}\,\theta\cos\theta = u'_x$

(3) $\cos\theta$ - (4) $\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = V'_\rho \cos\theta - V'_\theta \frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = V'_x$

Luego $f'(z) = \left(U'_\rho \cos\theta - \underbrace{U'_\theta \frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}}\right) + i\left(V'_\rho \cos\theta \underbrace{- V'_\theta \frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}}_{-V'_\rho}\right)$

V'_ρ

$$= U'_\rho \underbrace{(\cos\theta - i \,\text{sen}\,\theta)}_{e^{-i\theta}} + V'_\rho \underbrace{(\text{sen}\,\theta + i\cos\theta)}_{ie^{-i\theta}}$$

$$= \boxed{U'_\rho e^{-i\theta} + i V'_\rho e^{-i\theta}}$$

$f(z) = \ln \rho + i\theta \quad , \rho > 0 \; -\pi < \theta < \pi \quad \theta = \text{Arg}\, z$

logaritmo complejo

$U(\rho, \theta) = \ln \rho$

$V(\rho, \theta) = \theta$

u, v diferenciables si $\rho > 0, -\pi < \theta < \pi$

$U'_\rho = \frac{1}{\rho} \qquad V'_\rho = 0$

$U_\theta = 0 \qquad V'_\theta = 1$

<u>CR</u>: $U'_\rho = \frac{1}{\rho} V'_\theta \;\;;\;\; U'_\theta = -\rho V'_\rho$

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot 1 \;!\qquad 0 = -\rho \cdot 0$

$\Rightarrow f$ es derivable en z $\rho > 0, -\pi < \theta < \pi$

$f'(z) = U'_\rho e^{-i\theta} + i V'_\rho e^{-i\theta}$

$= \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} + i \cdot 0\, e^{-i\theta} = \rho^{-1} e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$

$\downarrow$

$\frac{1}{\rho}\cos(\theta) - \frac{i}{\rho}\,\text{sen}\,\theta$

Funciones elementales

- Polinómicas, coef $\in \mathbb{C}$ $\quad \text{Dom} f = \mathbb{C} \quad f \in H(\mathbb{C}),\; f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + k a_k z^{k-1}$
- Exponencial

$f(z) = e^x \cos(y) + i\, e^x \,\text{sen}\, y$

$u(x, y) = e^x \cos y$

$v(x, y) = e^x \,\text{sen}\, y$

- $\text{Dom} f = \mathbb{C}$
- u, v diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$

$u'_x = e^x \cos y$ $\quad v'_x = e^x \operatorname{sen} y$ $\quad$ verifica CR

$u'_y = -e^x \operatorname{sen} y$ $\quad v'_y = e^x \cos y$ $\quad \Rightarrow$ f derivable en todo punto (f entera)

$f \in H(\mathbb{C})$

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$$
$$= f(z)$$

Definición de $\varphi(x) = e^x$ es la única función que verifica

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \varphi(x) \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

Para la función f $\begin{cases} f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Denotamos $f(z) = e^z$ o $\exp(z)$

$\boxed{\text{Propiedades}}$

- $e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$
  $= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cdot e^{iy}$
- $e^{z+s} = e^{x+a+i(y+b)}$ $\quad z = x+iy$, $s = a+bi$
  $= e^{x+a} \cdot e^{i(y+b)} = e^x \cdot e^a \cdot e^{iy} \cdot e^{ib}$
  vale lo mismo para ℂ que para exp ℝ.
- $(e^z)^2 = e^z \cdot e^z = e^{2z}$
  $(e^z)^n = e^{nz}$
- $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$
- $e^{z+2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z$

una func es periódica de periodo p si $f(z+p) = f(z) \; \forall z$

~ Por 24, 28, 29a, fijarse ~

⑦ a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z} = \dfrac{x}{x+yi} = \dfrac{x(x-yi)}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2 - yxi}{x^2+y^2}$

$\lim_{z\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \quad \dfrac{-yxi}{x^2+y^2}$ ← no ayuda

$\lim_{r\to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} \dfrac{r\cos(\theta)}{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} = \lim_{r\to 0} \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$

1) $\theta = 0$ $\quad \lim_{z\to 0} f(z) = 1$ $\qquad$ 2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{z\to 0} f(z) = -i$

$\not\exists \lim$

b) $f(z) = \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{x+yi}{\sqrt{x^2+y^2}}$

si $y = ax$

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) : \lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{x^2+a^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{(1+a^2)x^2}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{1+a^2}\,|x|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(1+ai)}{|x|\sqrt{1+a^2}}$

$\to \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x(1+ai)}{|x|\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{1+ai}{\sqrt{1+a^2}}$

$\to \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} \dfrac{(1+ai)}{\sqrt{1+a^2}} = -\left(\dfrac{1+ai}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

que además de ser ≠, ocurre que el resultado queda dependiendo de a

↓

$\not\exists \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{|z|}$

c) $\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{r\to 0} \frac{(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}\theta)\cos\theta \cdot r^2}{r}$

$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\cdot r = 0$

Defino:

$$f(z)\begin{cases} \frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$$

d) $f(z) = z\cos\left(\frac{i}{|z|}\right) \Rightarrow z = re^{i\theta}$

$\lim_{r\to 0} r\cdot\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{1}{r}}}$ ↑

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\cdot e^{i\left(\frac{i}{r}\right)} = \lim_{r\to 0} r.e^{i\theta}\cdot e^{-\frac{1}{r}} \Big\} \to 0$

$f(z) = (x+yi)\left(\cos\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$

$= (x+yi)\, e^{i\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} = (x+yi)\, e^{\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}} = (x+yi)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)^{-1}$

$= \frac{(x+yi)}{e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}$

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\left(\cos\left(\frac{i}{|z|}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{i}{|z|}\right)\right)$

$= \lim_{z\to 0} z\left(\cosh\left(\frac{1}{|z|}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)$

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\left(\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{2} + \frac{e^{\frac{1}{r}}}{2} - \left(\frac{e^{\frac{1}{r}}}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{2}\right)\right)$

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\left(\frac{e^{-1/r}}{2} + \frac{e^{1/r}}{2} - \frac{e^{1/r}}{2} + \frac{e^{-1/r}}{2}\right)$ ok no salió

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}e^{-1/r}$ ↓ ¿o sí?

10) a) $f(z) = x^2 + iy^2$

$u(x,y) = x^2$

$v(x,y) = y^2$

CR $\partial u/\partial x = 2x$ $\partial v/\partial y = 2y$

$\partial u/\partial y = 0$ $2x = 2y$

$\partial v/\partial x = 0$ $0 = 0$

f es derivable en $z = x + ix$

$f'(z) = 2\operatorname{Re}(z)$

b) $f(z) = (x-iy)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$

$= re^{-i\theta}\cdot e^{-r}$

$= re^{-(\theta+r)} = \frac{r}{e^{i\theta+r}} = \frac{x^2+y^2}{\cos(\theta+r) + i\operatorname{sen}(\theta+r)}$

$= \frac{x^2+y^2}{\cos(\theta+x^2+y^2) + i\operatorname{sen}(\theta+x^2+y^2)} = \frac{|z|}{\operatorname{cis}(\theta+|z|)}$

a ver...

$u(x,y) = x\, e^{-(x^2+y^2)}$

$v(x,y) = -y\, e^{-(x^2+y^2)}$

} diferenciables, compos de funciones dif (polinómica y exponencial)

CR) $u'_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + x(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = (1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$u'_y = -2yx\, e^{-(x^2+y^2)}$

$v'x = 2yx\, e^{-(x^2+y^2)}$

$v'y = -e^{-(x^2+y^2)} + 2y^2 e^{-(x^2+y^2)} = -(1-2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$-1+2y^2 = 1-2x^2$

$2y^2+2x^2 = 2 \nearrow y^2+x^2 = 1$

Se cumple $\forall (x,y)$ / $x^2+y^2 = 1$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ ✓

c) $f(z) = \frac{x^2}{y} + i\,2xy$ Dom f = $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$u(x,y) = \frac{x^2}{y}$ $\partial u/\partial x = \frac{2x}{y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$

$v(x,y) = 2xy$ $\partial v/\partial x = 2y$ $\partial v/\partial y = 2x$

$\frac{2x}{y} = 2x$ sii $y = 1$

$\frac{-x^2}{y^2} = -2y \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2y$

$x^2 = 2y^3$

y debía valer 1

$\Downarrow$

$x^2 = 2$

$\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

f tiene derivada sólo en $z_1 = \sqrt{2} + i$

$z_2 = \sqrt{2} - i$

e) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) + z\,\mathrm{Im}(z) = z\left(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\right)$

Dom f = $\mathbb{C}$

$= (x + yi)\,(x + y)$

$= x^2 + yxi + xy + y^2 i$

$= \underbrace{x^2 + xy}_{u(x,y)} + i\underbrace{(yx + y^2)}_{v(x,y)}$

Dom u = $\mathbb{R}^2$

Dom v = $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ f es derivable en $z = 0$

$\boxed{2x + y = x + 2y}$ $\boxed{x = -y}$

$\downarrow$

$-2y + y = -y + 2y$ $\boxed{x = 0}$

$\boxed{-y = y}$ sii $\boxed{y = 0}$

F) $f(z) = (\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$ Dom f = $\mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\partial v/\partial x = 0$ $\Rightarrow$ f es derivable

$\partial u/\partial y = 0$ $\partial v/\partial y = 0$ $\forall z /\ \mathrm{Re}(z) = 0$

g) $f(z) = 3iz + z^2 = 3i(x + iy) + (x + iy)(x + yi)$

$= 3ix \underbrace{- 3y + x^2 - y^2} + 2xy \cdot i$

$u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y$

$v(x,y) = 3x + 2xy$

diferenciables

Dom f = $\mathbb{C}$

$\partial u/\partial x = 2x$

$\partial u/\partial y = -2y - 3$

$\partial v/\partial x = 3 + 2y$

$\partial v/\partial y = 2x$

$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 2x$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x = -2y - 3$

$\Rightarrow$ f tiene derivada en todo su dominio

h) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$ Dom f = $\mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ u, v dif $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

no se pueden cumplir ya que $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$

y para que se cumplan ambas $x = y = 0$

Abs.

f no es derivable en ningún z.

(11) $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$ Dom $f = \mathbb{C}$

$u(x,y) = x^2+y^2$

$v(x,y) = 0$

· u, v dif en $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \partial u/\partial x = 2x = 0 = \partial v/\partial y$

$\partial u/\partial y = 2y = 0 = -\partial v/\partial x$

se cumple que

f es deriable $\overset{\text{sii}}{\text{en}}$ $(0,0)$

Si $z \neq 0$ $\nexists f'(z)$

12 p)
$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{(\bar z)^3}{|z|^2} - \frac{(\bar z)^3}{|z|^2}\Big|_0}{z}$$

$$\frac{\bar z^3}{|z|^2} = \frac{(x-yi)^3}{x^2+y^2} = \frac{(r e^{-i\theta})^3}{r^2} = r e^{-3i\theta}$$

$\theta \in [-\pi,$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{r\to 0} \frac{r e^{-3i\theta} - 0}{r e^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} r e^{-3i\theta} \cdot r^{-1} e^{-i\theta}$$
$$= \lim_{r\to 0} e^{-4i\theta} = e^{-4i\theta}$$

~~(x^2+y^2)~~

f no es deriable en $z=0$ $\Downarrow$ u y v no son dif en $(0,0)$ $\Leftarrow$ $\theta = 0$ $\Downarrow$ $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 1$

$\theta = \pi/4$ $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = -1$

$x^3 + 3x^2(-yi) + 3x(-yi)^2 + (-yi)^3$

$$\frac{\bar z^3}{|z|^2} = \frac{x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3 i}{x^2+y^2}$$

$z \cdot \bar z = |z|^2$

$z = \frac{|z|^2}{\bar z}$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

Trabajo Práctico Nro. 2

Funciones Complejas. Funciones Holomorfas.

1. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $u(x,y)+i\,v(x,y)$ donde u y v son funciones reales:
   - (a) $f(z) = z^2$
   - (b) $f(z) = 2\bar z - 2iz$
   - (c) $f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1}$
   - (d) $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$

2. Describir el dominio de las funciones:
   - (a) $f(z) = z^2 + i2z$
   - (b) $f(z) = \frac{y}{x} + i\frac{1}{1-y}$
   - (c) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
   - (d) $f(z) = \frac{z}{\bar z - i}$
   - (e) $f(z) = \frac{1}{1-|z|}$

3. Hallar, si existen, los siguientes límites:
   - (a) $\lim_{z\to 2+3i} (z-5i)^2$
   - (b) $\lim_{z\to 2} \frac{z^2+3}{iz}$
   - (c) $\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1}$
   - (d) $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar z}$
   - (e) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar z^2}{z}$
   - (f) $\lim_{z\to 0} (\frac{\bar z}{z})^2$
   - (g) $\lim_{z\to i} \frac{x+y-1}{z-i}$
   - (h) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$
   - (i) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3+3iz^2+7}{z^2-i}$

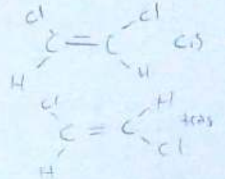
4. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios complejos de grado n y m respectivamente. Estudiar el $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}$ para $n>m$, $n=m$ y $n<m$

5. Analizar la continuidad de las funciones:
$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z+i)^2+1}{z} & \text{si } z\neq 0 \\ i & \text{si } z=0 \end{cases} \quad \text{en el origen.}$$
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z-1} & \text{si } |z|\neq 1 \\ 1 & \text{si } |z|=1 \end{cases} \quad \text{en los puntos } 1, -1, i \text{ y } -i.$$

6. Probar que la función $f(z) = \text{Arg}(z)$ es discontinua en todo punto del eje real no positivo.

7. Sean las funciones definidas para todo $z\neq 0$:
   - (a) $f(z) = \frac{\text{Re}\, z}{z}$
   - (b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$
   - (c) $f(z) = \frac{z\,\text{Re}\, z}{|z|}$
   - (d) $f(z) = z\,\text{cis}(\frac{i}{|z|})$

   ¿Cuáles pueden ser definidas en $z=0$ de modo que sean continuas en ese punto?



$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{z}$

Las derivadas
son por definición

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,0)-u(0,0)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2}-0\right)\frac{1}{x} = 1$$

debería hacer lo mismo con V

(14) a) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es deriv

$$\Rightarrow u'_x = v'_y$$
$$u'_y = -v'_x$$

$$J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$$
$$= u_x^2 + u_y^2$$
$$= V_y^2 + V_x^2$$

$$F'_x(z) = u_x(x,y) + i\,V_x(x,y)$$

$$F'_y(z) = u_y(x,y) + i\,V_y(x,y)$$

15) . $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

deriv en z_0 $\Rightarrow$ $u_x|_{z_0} = v_y|_{z_0}$

$u_y|_{z_0} = -v_x|_{z_0}$

$\boxed{\text{Cumple CR}}$ $\rightarrow$ Probar que u y v son C_1 en x_0, y_0

bien close

· $f'(z)$ es continua en z_0

$f(z) = z^n$ Dom$(f) = \mathbb{C}$

$n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ $f(z) = z$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z+h-z}{h} = 1$$

$n \geq 2$ $f(z) = z^n$

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} z^{n-1} = 0$$

Ver si z^n es deriv en z

$z = r e^{i\theta}$

$f(z) = z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

$u(r,\theta) = r^n \cos(n\theta)$

$v(r,\theta) = r^n \operatorname{sen}(n\theta)$ $\Big\}$ dif en $\mathbb{C} - \{0\}$

$\boxed{\text{Probamos } (z^n)' = n z^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in \mathbb{C}}$

$u_r = n r^{n-1} \cos(n\theta)$

$v_\theta = n r^n \cos(n\theta)$

$u_\theta = -n r^n \operatorname{sen}(n\theta)$

$v_r = n r^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta)$

CR

$$\begin{cases} \frac{1}{r} v_\theta = n r^{n-1} \cos(n\theta) = u_r \ ✓ \\ -r v_r = -n r^n \operatorname{sen}(n\theta) = u_\theta \ ✓ \end{cases}$$

$\therefore$ f derivable $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$f'(z) = (u_r + i v_r) e^{-i\theta}$

$f'(z) = (n r^{n-1} \cos(n\theta) + i n r^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta)) \cdot e^{-i\theta}$

$$f'(z) = n r^{n-1} \underbrace{(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))}_{= e^{in\theta}} e^{-i\theta} = n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = n (r e^{i\theta})^{n-1}$$

$g(z) = 3z^5 + 4z^3 + (3+i) z^2 - 5i \rightarrow g$ es entera

$g'(z) = 15 z^4 + 12 z^2 - 2(3+i) z$ (g holom en $\mathbb{C}$)

$h(z) = \frac{1}{z}$; $z \in \mathbb{C} - \{0\}$; $h'(z) = ?$

$z = r e^{i\theta}$

$$h(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r e^{-i\theta}}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta))$$

$u(r,\theta) = \frac{1}{r} \cos(\theta)$

$v(r,\theta) = -\frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta)$ $\Big\}$ u, v dif en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$u_r = -\frac{1}{r^2}\cos(\theta) \qquad \rightarrow \frac{1}{r} v_\theta = \frac{-1}{r^2}\cos\theta = u_r$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\cos(\theta)$$

CR

$$u_\theta = \frac{-1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \rightarrow -r\,v_r = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$v_r = \frac{1}{-r^2}\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$\Rightarrow$ dif y CR $\therefore$ f es derivable en $\mathbb{C} - \{0\}$

$$f'(z) = (u_r + i v_r)\, e^{-i\theta}$$

$$f'(z) = \left(\frac{-1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) e^{-i\theta}$$

$$= \frac{-1}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right)e^{-i\theta} = -\frac{1}{r^2}\,e^{-2i\theta}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{z^2}$$

10 - l) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$ Dom $f = \mathbb{C} - \{1, -1,$

$z \neq 1$ $f(z) = \underbrace{\dfrac{1}{z-1}}_{\text{derivable en todo el plano} - \{1\} \text{ cociente de funciones derivables}} + \underbrace{\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}}_{\text{deriv en todo punto} - \{-1, 2\}}$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-2z+1}{(z+1)^2(z-2)^2}$$

19) a) $f(z) = \bar{f}(z) \Rightarrow \underbrace{\begin{matrix} u(x,y) = u(x,y) \\ v(x,y) = -v(x,y) \end{matrix}}$

$\Rightarrow v(x,y) = 0 \;\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\therefore f(z) = u(x,y) + i0$, con u cont en $\mathbb{R}^2$

b) f holomorfa $f(z) = \bar{f}(z)$
- u, v dif en $\mathbb{R}^2$
- CR

f entera $\Rightarrow$ $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ | $\partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ | $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$

De (1) y (3) $V_y = 0$; $u_x = 0$

De (2) y (4) $\underbrace{V_x = 0}$; $\underbrace{u_y = 0}$ → en abierto conexo → u, v ctes

$$\boxed{f(z) = C_1 + iC_2}$$

b) Hallar f holomorfa en $\mathbb{C}$ / $f(z) = \bar{f}(z)$

f holomorfa en $\mathbb{C}$ → f continua en $\mathbb{C}$

de 19 - a) $f(z) = u(x,y)$ con u dif en $\mathbb{R}^2$

$$f(z) = u(x,y) + i0$$

Además CR

$u_x(x,y) = 0 = V_y(x,y)$

$u_y(x,y) = 0 = -V_x(x,y)$

$$\boxed{f(z) = C \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$30)\ b)\ f \text{ holomorfa en } \mathbb{C} \text{ y } |\overbrace{f(z)+1}^{g(z) \text{ holomorfa en } \mathbb{C}}| = 1,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

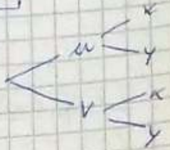
$\Rightarrow f$ cte

$g(z) = u + iv \Rightarrow |g(z)| = 1$

$$|g(z)|^2 = \boxed{1 = u^2 + v^2}$$

$\frac{\partial}{\partial x}: 2u \cdot u'_x + 2v \cdot \underbrace{v'_x}_{-u_y} = 0$ CR

$\frac{\partial}{\partial y}: 2u\, u'_y + 2v\, \underbrace{v'_y}_{u_x} = 0$



$\hookrightarrow$ $u\,u_x - v\,u_y = 0$

$v\,u_x + u\,u_y = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}}_{\text{SL Hom cuadrado}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ único SC: $u_x = u_y = 0 \Rightarrow u = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$

y por CR

$v_x = v_y = 0 \Rightarrow v = k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$

$\det(D) = u^2 + v^2 = 1 \neq 0$

$f(z) = e^{i\arg(z)} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$$f(z) = \begin{cases} e^{i\theta} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

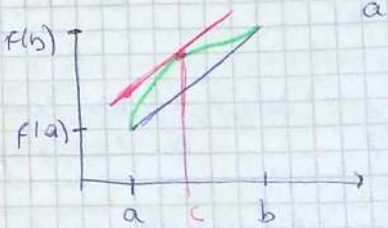
$\left.\begin{array}{l} f \text{ no es cte} \\ |f(z)| = 1\ \forall z \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ no es holomorfa

Em AI

$f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua en $[a,b]$

f derivable en $(a,b) \Rightarrow$

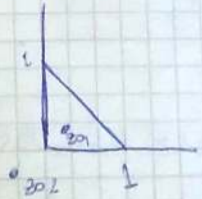
$\exists\, c \in (a,b) / \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$



$f(z) = z^3$

$z_1 = 1 \quad z_2 = i$

$\nexists\, z_0$ entre z_1 y z_2 / $\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = f'(z_0)$



$f(z_2) = i^3 = -i$

$f(z_1) = 1$

$f'(z_0) = 3z_0^2$

Reemplazando

$-i - 1 = 3z_0^2(i - 1)$

$i^3 - 1^3 = 3z_0^2(i - 1)$

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{z}$

$3 z_0^2 = \frac{i^3 - 1^3}{i - 1} \Rightarrow 3 z_0^2 = \overset{-1}{i^2} + i + 1$

$z_0^2 = \frac{i}{3} = \frac{1}{3} e^{i\pi/2}$

$z_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\pi/4}$ } que no están en el segmento

$z_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i 5/4 \pi}$

15) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$f'(z) = u'_x(x,y) + i\,v'_x(x,y)$

f cont en $z_0 \Leftrightarrow u'_x$ y v'_x son continuas en (x_0, y_0)

Por C-R $u'_x = v'_y$, $v'_x = -u'_y$ $\Rightarrow v'_y$ y u'_y son continuas en (x_0, y_0)

u, v tienen derivadas parciales continuas en $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ u y v son C^1 en (x_0, y_0)

18) a) $f'(z) = 3z^2 + 4z - 3$

$f(1+i) = -3i$

$g(z) = z^3 + 2z^2 - 3z$

$g'(z) = f'(z) \Rightarrow g(z) = f(z) + k, \; k \in \mathbb{C}$

$(g \cdot f)' = 0 \Rightarrow g(z) f(z) = k$

---

8. Sabiendo que la función $f(z)$ es continua en un conjunto abierto D, ¿qué se puede decir sobre la continuidad de $|f(z)|$, $\bar{f}(z)$, $f(\bar{z})$ y $\frac{1}{f(z)}$? ✓

9. Supongamos que z_0 es un punto de discontinuidad de las funciones $f(z)$ y $g(z)$. Analizar si z_0 también es punto de discontinuidad de las funciones $f(z)+g(z)$, $f(z)\,g(z)$ y $\frac{f(z)}{g(z)}$. ✓

10. Determinar los puntos en los cuales las funciones dadas tienen derivada y en esos puntos calcularlas:
    - (a) $f(z) = x^2 + i\,y^2$ ✓
    - (b) $f(z) = (x - iy)e^{-(x^2+y^2)}$
    - (c) $f(z) = \frac{x^2}{y} + i\,2xy$
    - (d) $f(z) = \operatorname{Im} z$ ✓
    - (e) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Re} z + z \operatorname{Im} z$
    - (f) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$
    - (g) $f(z) = 3iz + z^2$
    - (h) $f(z) = |z|$
    - (i) $f(z) = (z - 3i)^5$
    - (j) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$
    - (k) $f(z) = \frac{1}{z}$
    - (l) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$

11. Sea $f(z) = |z|^2$. Verificar que las condiciones de Cauchy Riemann se cumplen sólo si $z = 0$. ¿Qué se puede decir acerca de las existencia de $f'(z)$ si $z \neq 0$? ¿Existe $f'(0)$? ✓

12. Demostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

no es derivable en $z = 0$ pero que las condiciones de Cauchy Riemann se verifican en ese punto.

Este ejemplo muestra que las condiciones de Cauchy Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad. ✓

13. Mostrar que $f(z) = |z|$ no es derivable en ningún punto. Confrontar con la diferenciabilidad de $\sqrt{x^2 + y^2}$ como función de $\mathbb{R}^2$. ✓

14. (a) Probar que si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en (x,y) entonces

$$|\mathrm{detDf}(x,y)| = J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = |f'(z)|^2$$

(b) Sean $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$ y $z_2 = i$. Probar que no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une a z_1 y z_2 tal que $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$. Este ejemplo muestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas. ✓

Función exponencial $f(z) = e^z = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = \exp(z)$

(26) a) $\exp(0) = e^0 \cos 0 + e^0 \operatorname{sen} 0 = 1$

b) $\exp(i\pi/2) = i$

c) $\exp(z + i\pi) = \exp(x + iy + i\pi) = e^x \cos(y+\pi) + i\, e^x \operatorname{sen}(y+\pi)$

$$= -e^x \cos y + i\,(-e^x \operatorname{sen} y) = -\exp(z)$$

d) $\overline{\exp z} = \overline{e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y}$

$$= e^x \cos y - i\, e^x \operatorname{sen} y$$

$$= e^x \cos(-y) + i\, e^x \operatorname{sen}(-y) = \exp(x - iy)$$

$$= \exp(\bar{z})$$

27) a) $\exp(i\bar{z}) \neq \overline{\exp(iz)}$ a menos que $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Equiv $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ sii $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$i\bar{z} = i(x - iy) = y + ix$$

$$iz = i(x + iy) = -y + ix$$

$$\exp(i\bar{z}) = \exp(y + ix) = e^y \cos(x) + i\, e^y \operatorname{sen}(x)$$

$$\overline{\exp(iz)} = \overline{\exp(-y + ix)} = \overline{e^{-y} \cos x + i\, e^{-y} \operatorname{sen} x}$$

$$= e^{-y} \cos x - i\, e^{-y} \operatorname{sen} x$$

$$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)} \iff \begin{array}{l} e^y \cos x = e^{-y} \cos x \\ e^y \operatorname{sen} x = -e^{-y} \operatorname{sen} x \end{array}$$

si $\cos(x) \neq 0 \to e^{y} = -e^{-y} \Rightarrow y = 0$

si $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \neq 0$

$\Rightarrow$ en (2) $e^{y} = -e^{-y}$ Abs

Si $y = 0$

en (2) $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$

$\Leftrightarrow x \in k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{z = k\pi + i0}$

Funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$
$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{sen}\theta$$

Definimos

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

Propiedades

- Son enteras: $(\operatorname{sen} z)' = \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} - (-i) e^{-iz}\right.$

$$= \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} - (-i) e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} + i e^{-iz}\right)$$
$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}\left(i e^{iz} + (-i) e^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$
$$= \frac{-1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\operatorname{sen} z$$

- Sobre el eje real, $z = x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right\}$$ coinciden con seno y coseno $\mathbb{R}$

- Son periódicas

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz + i2\pi} - e^{-iz - i2\pi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \operatorname{sen} z$$

Similarmente $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$

- Valen identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left[-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right] = \frac{4}{4} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

También valen (demostrar)

$\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen}(z)$

$\cos(z+\pi) = -\cos(z)$

$\operatorname{sen}(z+\pi/2) = \cos(z)$

$\cos(z+\pi/2) = -\operatorname{sen}(z)$

- sen no acotados en el plano $\mathbb{C}$

- Re (sen z) ? Im (sen z) ?

$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$

Recordemos $\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \cosh y$

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$$

$$+ i \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(+\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(\cancel{e^{ix}e^{y}} + e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y} - \cancel{e^{-ix}e^{-y}}\right) - \frac{1}{4i}$$

$$\left(\cancel{e^{ix}e^{y}} - e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y} - \cancel{e^{-ix}e^{-y}}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2e^{ix}e^{-y} - 2e^{-ix}e^{y}\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$$

$= \operatorname{sen}(z)$

- $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y$

$- i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

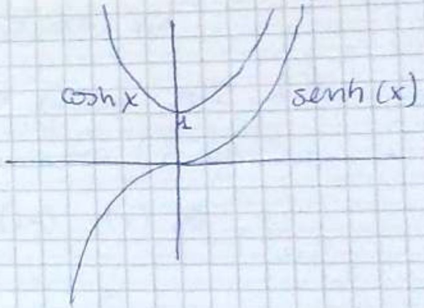
Veamos que sen z no está acotado

$$|\operatorname{sen} z|^2 = (\underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y}) ^2 + (\underbrace{\cos x \operatorname{senh} y})^2$$

$$= \cdot + * + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \underbrace{(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y)}_{+1} + \operatorname{senh}^2 y \underbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}_{1}$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$



Ceros de seno

$$\operatorname{sen} z = 0$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \nearrow$$

$$e^{iz} = e^{-iz}$$

$$e^{-y}e^{ix} = e^{y}e^{-ix}$$

$$\begin{cases} \text{módulo: } e^{-y} = e^{y} \\ \text{argumento: } x = -x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{módulo: } y = 0 \\ \text{arg: } x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Los ceros del seno son los $z = k\pi + 0i$

La ecuación $\overset{\cos}{\text{con}}(z) = 2$ tiene infinitas soluciones la ec:

$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 2$

sii $\begin{cases} \cos x \cosh y = 2 & (1) \\ -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0 & (2) \end{cases}$

De (2) o bien $\operatorname{senh} y = 0$

* si $\operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ de (1) $\cosh 0 = 1$
  sii $\cos x = 2$ no tiene sol.

* si $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  de (1) $\cos x = \cos k\pi = (-1)^k$
  en (1) $(-1)^k \cosh y = 2$
  $\cosh y = (-1)^k\, 2$
  como $\cosh y > 0$, k debe ser par

$$\cosh y = 2$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2$$

$$e^y + e^{-y} = 1 \quad \text{mult por } e^y$$

$$e^{2y} + 1 - 4e^y = 0$$

$$w = e^y \Rightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$$

$e^y = 2 \pm \sqrt{3}$

$y_{1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3})$

$$w = 2 \pm \sqrt{3}$$

las sols son $z_{1,2} = k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ k par

Definimos:

- $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ siempre que $\cos z \neq 0$
- $\operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$ siempre que $\operatorname{tg} z \neq 0$
- $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ si $\cos z \neq 0$
- $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ si $\operatorname{sen} z \neq 0$

$\boxed{\text{Trigonométricas hiperbólicas}}$

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Propiedades

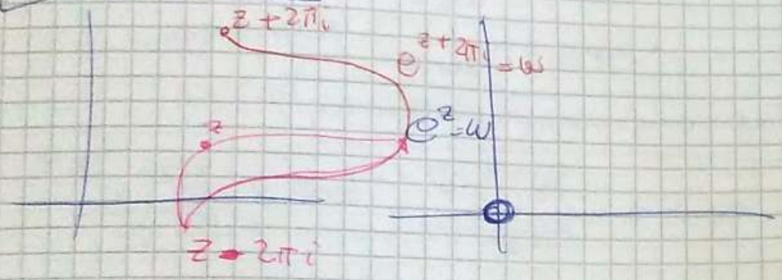
- son enteras $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$
  $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$
- $2\pi i$-periódicas
  Es decir $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(z \pm 2\pi i)$
  $\cosh(z) = \cosh(z \pm 2\pi i)$
- no acotadas
- $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y \overset{?}{+} i \cosh x \operatorname{sen} y$
  $\cosh z = \cosh x \cos y \; ? \; i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{senh}(iz) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\,\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \operatorname{sen}(z)$

  $\operatorname{sen}(iz) = e^{i(iz)} - e^{-i(iz)} = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\,\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \operatorname{senh}(z)$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh(z)$$

$\boxed{\text{Inversa de } e^z}$



dado que z es / $e^z = w$?

$z = x + iy \qquad e^z = e^x \cdot e^{iy} = w$

Conociendo $w \neq 0$ como hallar x, y?

$e^x = |w| \Rightarrow x = \ln|w|$

$y = \arg(w) \rightarrow$ hay infinitos

Dado $w \neq 0$, $f(w) = \ln|w| + i\arg(w)$

$$f(w) = f(\underbrace{re^{i\theta}}_{w}) = \ln r + i\theta$$

Para que sea función (univaluada) se debe restringir el $\arg(w) = \theta$

Ej $f_0(w) = \ln r + i\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$f_\pi(w) = \ln r + i\theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$

$f_\alpha(w) = \ln r + i\theta$, $\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$

son logaritmos (inversas de e^z)

$\log_\alpha z = \ln r + i\theta \qquad \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$

con $r = |z|$
$\arg z = \theta$ } en ese intervalo

Ejemplos

$\log_0 z = \ln r + i\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

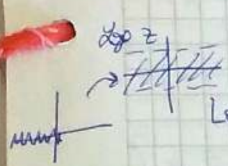
$\log_0(i) = \ln|i| + i\arg(i) = i\pi/2$

$\log_0(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 + i\frac{3}{2}\pi$

$\log_{-\pi}(z) = \ln r + i\theta$

$\log_{-\pi}(i) = \ln|i| + i\arg(i) = 0 + i\frac{\pi}{2}$

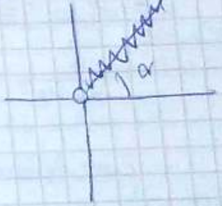
$\log_{-\pi}(-2i) = \ln|2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$



Logaritmo principal = $\text{Log}(z) = \ln r + i\theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$\theta = \text{Arg}\, z$

$\boxed{\text{Propiedades}}$



- $\log_\alpha z$ es holomorfa en $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

$$\left(\log_\alpha z\right)' = \frac{1}{z}$$

- $\text{Log}\, z = \log_\alpha z + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{3!}$

$\bullet\ e^{i\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$

ojo: $\log(e^{z}) = \log(e^{x} \cdot e^{iy}) = \ln(e^{x}) + i\arg e^{iy}$ "
$= x + i(y + 2k\pi)$

Hasta el 34

---

19 c) $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Dom} f = \{\mathbb{C}\}$

$\Rightarrow$ cumple CR y u,v son dif para todo $\mathbb{C}$

es que $u_x(x,y) = v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

como vale $\forall\, \mathbb{C}$ que f sea holomorfa

y $z \in \mathbb{C}$ y $\bar{z} \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow f(\bar{z})$ holomorfa

sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$\bar{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$

si u, v son dif $\Rightarrow$ u y $-v$ son dif.

Por CR:

$u_x(x,y) = -v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = v_x(x,y)$

¿Hay problemas?

$\bar{f}(z) = \bar{z} \cdot |z|^2 = (x - yi)(x^2+y^2) = x^3 - y^3 i$ $\quad |z|^2 = \bar{z} \cdot z$ } no

$\downarrow$
$z \cdot |z|^2$

u, v dif en $\mathbb{C}$

(0 0 0)

f es holomorfa en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ u,v son dif en $\mathbb{C}$
y cumple CR en $\mathbb{C}$
$\rightarrow \exists\, f'(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$
$\downarrow$
esto quiere decir que f es holom en $\bar{z}$ tmb

Si me pide $\bar{f}(\bar{z})$ holom en $\mathbb{C}$ es lo mismo que pedir que $\bar{f}(z)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$ ya que debe valer tanto para z como $\bar{z}$. $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Preguntar}}$

d) $f'(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)$

$u_x = xy^2$ (también $= v'_y$), $v_x = 0$

$u_x(x,y) = xy^2 = v_y(x,y)$

$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$

$v(x,y) = \frac{xy^3}{3} + h(x)$

$u_y(x,y) = x^2y + g'(y)$
$-v_x(x,y) = -\frac{y^3}{3} + h'(x)$ } no hay forma parece

$u(x,y) = \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$

$u'_x = xy^2 = v'_y$

$v'_x = -u'_y = 0$

$v(x,y) = x\frac{y^3}{3} + w(x)$

$-u'_y(x,y) = -x^2y - g'(y)$

$v'_x(x,y) = \frac{y^3}{3} + w'(x)$

$-x^2y - g'(y) = \frac{y^3}{3} + w'(x)$

$\boxed{\text{no}}$

20) a) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\quad / u(x,y) = v(x,y)$

$u_x(x,y) = v_y(x,y) = u_y(x,y)$
$u_y(x,y) = -v_x(x,y) = -u_x(x,y)$ } para que sea holomorfa deben ser 0

$\Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2 \quad / c_1$ y $c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ es falso el enunciado.

22) $f(z)$ holomorfa en D $\Rightarrow$ u,v dif en D
CR en D $\longrightarrow$ $u_x(x,y) = v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

$\bar{f}(z)$ " " $\Rightarrow$ $u, -v$ dif en D
CR en D $\longrightarrow$ $u_x(x,y) = -v_y(x,y)$
$u_y(x,y) = v_x(x,y)$

las 4 se dan si valen 0 $\Rightarrow$ u,v ctes

$\frac{1}{3!} +$

$p_0 = (x_0, y_0)$

$g(p_0) = u_0(x_0, y_0) + i\, V_0(x_0, y_0)$ $\quad$ u, V def en D

$h(p_0) = u_1(x_0, y_0) + i\, V_1(x_0, y_0)$ $\quad$ y cumplen CR en D

$u_1(x, y) = u_0(x, y)$

$u_{0x}(x, y) = V_{0y}(x, y)$ $\quad$ $u_{1x}(x, y) = u_{0x}(x, y) = V_{1y}(x, y)$

$u_{0y}(x, y) = -V_{0x}(x, y)$ $\quad$ $u_{1y}(x, y) = -V_{1x}(x, y)$

para que se cumplan deben coincidir las derivadas

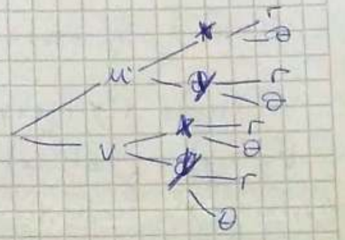
además → si coinciden en un punto no queda otra que de las ∞ funciones que cumplen sean iguales.

$g'(x, y) = h'(x, y)$

$\quad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$u'_x(x, y) - i\, \underbrace{u'_y(x, y)}_{V'_x(x, y)}$

(23) $x = r \cos \theta$ $\quad$ $y = r \operatorname{sen} \theta$



$z = x + iy = re^{i\theta}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u'_x \cos\theta + u'_y \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = u'_x(-r \operatorname{sen}\theta) + u'_y\, r \cos\theta$$

idem: $\dfrac{\partial v}{\partial r} = V'_x \cos\theta + V'_y \operatorname{sen}\theta$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = V'_x(-r\operatorname{sen}\theta) + V'_y\, r\cos\theta$$

---

15. Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$. Probar que si $f'(z)$ es continua en z_0 entonces u y v son C^1 en (x_0, y_0). ✓

16. Decir en qué puntos del plano complejo son holomorfas las funciones del ejercicio 10. ¿Alguna es entera?

17. Determinar para qué valores de a y $b \in \mathbb{R}$, $f(z) = (ax + 2y) + i(-2x + by)$ es una función entera.

18. Hallar la función holomorfa que satisface las siguientes condiciones:
    (a) $f'(z) = 3z^2 + 4z - 3$, $f(1 + i) = -3i$ $\qquad$ (b) $\operatorname{Re}[f'(z)] = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $f(1 + i) = 0$

19. (a) Hallar todas las funciones $f(z)$ continuas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$. ✓
    (b) Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$. ✓
    (c) ¿Es cierto que si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$?
    (d) ¿Existe f holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f'(z) = xy^2$? No ∃
    (e) "Parecido a 22 a) Halle todas las func / $F(z)$ y $\overline{F(z)}$ sean enteras si existen

20. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar:
    (a) Si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ en $\mathbb{C}$, entonces $f(0) \neq f(1)$. F
    (b) Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y si $|f(z) + 1| = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante en $\mathbb{C}$. ✓

21. Un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ se denomina dominio o recinto.
    (a) Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son dominios de $\mathbb{C}$:
        (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg}(z) \neq 0\}$
        (ii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$
        (iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) > 0\}$
        (iv) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\operatorname{Re}(z)| < 1\}$
        (v) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$
        (vi) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 4\}$
        (vii) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ y } |z| > 2\}$
    (b) Dar un ejemplo de una función no constante y holomorfa en un conjunto D con $f'(z) = 0$ para toda $z \in D$.
    se cumple si es conexo $\quad f(z) \begin{cases} 1 & \operatorname{Im} z > 0 \\ -1 & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$ $\quad$ Dom f $= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ no conexo

22. Sea D un dominio del plano complejo.
    (a) Probar que si $f(z)$ y $\bar{f}(z)$ son holomorfas en D entonces f es constante en D. ✓
    (b) Probar que dos funciones holomorfas en D que coinciden en un punto de D, y tienen igual parte real, son iguales en todo D. ±

23. Probar que para $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann son:
    $$r\,u_r = v_\theta \quad , \quad r\,v_r = -u_\theta$$
    y si f es derivable en $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0)$, entonces
    $$f'(z_0) = (\cos\theta_0 - i\operatorname{sen}\theta_0)(u_r + iv_r)$$
    → lo hicimos en clase pero viene bien rehacerlo ✓

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

$u'_x = V'_y$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial r} = V'_x\cos\theta + u'_x\,\text{sen}\,\theta = \underbrace{-u'_y\cos\theta + u'_x\,\text{sen}\,\theta}$

$u'_y = -V'_x$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = V'_x(-r\,\text{sen}\,\theta) + u'_x\, r\cos\theta$

$$= \underbrace{u'_y\, r\,\text{sen}\,\theta + u'_x\, r\cos\theta}$$

$$\boxed{\partial V/\partial\theta = r\,\partial u/\partial r}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = u'_x\cos\theta + u'_y\,\text{sen}\,\theta} = V'_y\cos\theta - V'_x\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = u'_x(-r\,\text{sen}\,\theta) + u'_y(r\cos\theta)$$

$$= \underbrace{-u'_x\, r\,\text{sen}\,\theta + u'_y\, r\cos\theta}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}}$$

Si f es derivable en $z_0 = r_0\cos\theta_0 + i\,\text{sen}\,\theta_0$

$\Rightarrow f'(z) = u_x(x,y) + i\,V_x(x,y)$

$V_r = -u_y\cos\theta + u_x\,\text{sen}\,\theta \rightarrow -V_r\cos\theta = u_y\cos^2\theta - u_x\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$V_\theta = u_y\, r\,\text{sen}\,\theta + u_x\, r\cos\theta \rightarrow V_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{r} = u_y\,\text{sen}^2\theta + u_x\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$

$$V_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{r} - V_r\cos\theta = u_y = \underbrace{-V_x}_{CR.}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_x = -V_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{r} + V_r\cos\theta} \rightarrow \boxed{-u_r\,\text{sen}\,\theta + V_r\cos\theta = V_x}$$

$V_r = V_x\cos\theta + V_y\,\text{sen}\,\theta \rightarrow V_r\,\text{sen}\,\theta = V_x\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + V_y\,\text{sen}^2\theta$

$V_\theta = -V_x\, r\,\text{sen}\,\theta + V_y\, r\cos\theta \rightarrow \frac{V_\theta}{r}\cos\theta = -V_x\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + V_y\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{V_r\,\text{sen}\,\theta + \frac{V_\theta}{r}\cos\theta = V_y = u_x}$$

$$\boxed{V_r\,\text{sen}\,\theta + u_r\cos\theta = u_x}$$

$$f'(z) = (V_r\,\text{sen}\,\theta + u_r\cos\theta) + i(-\underset{\text{sen}\theta}{u_r} + V_r\cos\theta) = V_r(\text{sen}\,\theta + i\cos\theta) + u_r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\boxed{V_r\, i(-i\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta) + u_r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)}$$

$\frac{1}{3!} +$

㉔ i) $f(z)=az+b$

$D f=\mathbb{C}$ f continua en $\mathbb{C}$ por ser compos. de funciones continuas

$Im f=\mathbb{C}$

ii) $f(z)=1/z$ compos de func continuas es cont salvo en donde se anula del denom~~do~~

$Dom f=\mathbb{C}-\{0\}$

$Im f=\mathbb{C}-\{0\}$

$C_f=\mathbb{C}-\{0\}$

iii) $f(z)=\bar{z}=x$ ~~+~~ $y i$ $Dom f=\mathbb{C}$ $C_f=\mathbb{C}$

$Im f=\mathbb{C}$

$z=f(w)=\overline{w}$

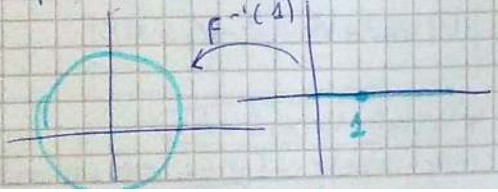
iv) $f(z)=z^2=x^2-y^2+2yxi$ $Dom f=\mathbb{C}$ $C_f=\mathbb{C}$

$Im f=\mathbb{C}$

v) $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ $Dom f=\mathbb{C}$ $C_f=\mathbb{C}$

$Im f=\{z\in\mathbb{R}/z\geq 0\}$

$f(z)=|z|=w$



$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

㉕ a) $e^{2+i2}=e^{2}\cos(2)+i\operatorname{sen}(2)e^{2}$

b) $e^{3}e^{i2}=e^{3}\cos(2)+e^{3}i\operatorname{sen}(2)$

c) $e^{i}=\cos(1)+i\operatorname{sen}(1)$

d) $\operatorname{sen}(4+i2)=\frac{e^{i(4+i2)}-e^{-i(4+i2)}}{2i}$

$$=\frac{e^{4i}\cdot e^{-2}-e^{-i4}e^{2}}{2i}=\frac{e^{4i-2}-e^{-4i+2}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-2}\cos(4)+e^{-2}i\operatorname{sen}(4)-e^{2}\cos(-4)-ie^{2}\operatorname{sen}(-4)}{2i}$$

$$=-i\frac{e^{-2}}{2}\cos(4)+\frac{e^{-2}}{2}\operatorname{sen}(4)+i\frac{e^{2}}{2}\cos(-4)-\frac{e^{2}}{2}\operatorname{sen}(-4)$$

e) $\cos(e^{1+3i})=\cos(e^{1}\cos(3)+ie^{1}\operatorname{sen}(3))$ ← ⑧

$$=\frac{e^{i(e\cos(3)+ie\operatorname{sen}(3))}-e^{-i(e\cos(3)+ie\operatorname{sen}(3))}}{2i}$$

$$=\frac{e^{ie\cos(3)}e^{-e\operatorname{sen}(3)}-e^{-ie\cos(3)}e^{e\operatorname{sen}(3)}}{2i}$$

$$=\frac{e^{ie\cos(3)-e\operatorname{sen}(3)}-e^{-ie\cos(3)+e\operatorname{sen}(3)}}{2i}$$

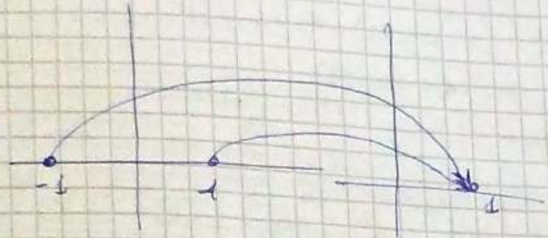
$$=\frac{e^{-e\operatorname{sen}(3)}\left(\cos(e\cos(3))+ie\operatorname{sen}(3)\right)-e^{e\operatorname{sen}(3)}(\cos(-e\cos(3))+i\operatorname{sen}(-e\cos(3)))}{2i}$$

$$=-ie^{-e\operatorname{sen}(3)}(\cos(e\cos(3))+i\overset{\operatorname{sen}}{e\operatorname{sen}}(3))+ie^{e\operatorname{sen}(3)}(\cos(\bar{e}\cos(3))+i\overset{\operatorname{sen}}{e}\operatorname{sen}(3))$$ %/

$\frac{1}{3!}$ +

㉑ adic $f(z) = z^2 = w$

$z = f^{-1}(w)$ $z^2 = 1 + \sqrt{3}\, i$



28 c) $\operatorname{sen} z = 10$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 10$$

$$e^{iz} - 20i - \frac{1}{e^{iz}} = 0$$

$$e^{2iz} - 20i\, e^{iz} - 1 = 0$$

$w = e^{iz}$

$$w^2 - 20iw - 1 = 0$$

$$w = \frac{20i \pm \sqrt{(-20i)^2 - 4(-1)\,1}}{2}$$

$$w = 20i \pm \sqrt{-400 + 4}$$

$$w = 10i \pm \frac{\sqrt{-396}}{2} = 10i \pm i\sqrt{99}$$

$$w = e^{iz} = (10 \pm \sqrt{99})\, i$$

$$e^{-y} e^{ix} = (10 \pm \sqrt{99})\, e^{i\pi/2}$$

$$\begin{cases} e^{-y} = 10 \pm \sqrt{99} \\ x = \pi/2 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\ln(10 \pm \sqrt{99}) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

soluciones $z_{1k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i(-\ln(10 + \sqrt{99}))$

$z_{2k} = \pi/2 + 2k\pi + i(-\ln(10 - \sqrt{99}))$

$\frac{1}{3!} +$

g) $\operatorname{sh} z = 2i$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(i(-iz)) = i \operatorname{sen}(-iz)$$
$$= -i \operatorname{sen}(iz) = -i \operatorname{sen}(-y + ix)$$
$$= -i\,(\operatorname{sen}(-y) \operatorname{ch} x + i \cos(-y) \operatorname{sh} x) =$$
$$\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y$$

$\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y = 2i$

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x \cos y = 0 & (1) \\ \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y = 2 & (2) \end{cases}$$

de (1) $\operatorname{sh} x = 0$

$\operatorname{sh} x \Leftrightarrow x = 0$
$=0$

de (2) $\operatorname{ch}(0) = 1$

Resulta $\operatorname{sen} y = 2$

$\nexists$ sol

$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

En (2) $\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$

Resulta $\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sen} y = 2$

$\operatorname{ch}(x)\,(-1)^k = 2$

$\operatorname{ch}(x) = (-1)^k 2 \Rightarrow k$ debe ser par

$ch\, x = 2$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$$

$$e^x - 4 + e^{-x} = 0$$

$$e^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

$t = e^x$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow \boxed{t = 2 \pm \sqrt{3}}$$

$x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$

Soluciones:

$$z_{1h} = \ln(2+\sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2h\pi)$$

$$z_{2h} = \ln(2-\sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2h\pi) \quad h \in \mathbb{Z}$$

28 c)

$$(\text{Log}\, z)^2 + \text{Log}\, z = -1$$

Sea $w = \text{Log}\, z$

$$w^2 + w + 1 = 0$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$w = -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$w = \text{Log}\, z = \ln r + i\theta = -1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$$

$$\begin{cases} \ln r = -1/2 \\ \theta = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r = e^{-1/2} \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\theta = \text{Arg}\, z$

$-\pi \leq \text{Arg}\, z \leq \pi$

Como $-\pi \leq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \pi$

ambas son soluciones

Soluciones:

$$z_1 = e^{-1/2} e^{i\sqrt{3}/2}$$

$$z_2 = e^{-1/2} e^{-i\sqrt{3}/2}$$

---

30) $f(z) = \exp(iz)$

Función acotada en $D \subset \mathbb{C}$

Im f acotada en $B(z, M)$

$\exists M > 0 \,/\, \rightsquigarrow |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D$

En este caso $D = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \text{Im}\, z \geq 0 \}$

$$|f(z)| = |e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y} e^{xi}| = \underset{\substack{\downarrow \\ z \in D}}{e^{-y} \leq 1}$$

en D

$y \geq 0$

$e^{-y} \leq e^0$

$e^{-y} \leq 1$

Es más, $\hat{f}(z) = e^{iaz}$ está acotado en semiplano superior $\forall$ a real, $a > 0$

$f(z) = e^{-iz}$ está acotado en D?

$$|f(z)| = |e^{-iz}| = |e^y e^{-ix}| = \underbrace{e^y}$$

puede ser muuuy grande tomando y grandes. ⇒ no está acotada en el semiplano superior

en $\tilde{D} = \{ z \in \mathbb{C} \ \text{Im}\, z \leq 0 \}$

$$|f(z)| = \underset{\substack{\uparrow \\ z \in \tilde{D}}}{e^y \leq 1} \Rightarrow f \text{ está acotada en } \tilde{D}$$

b) $\text{sen}\, z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad |\text{sen}\, z|^2 = \text{sen}^2 x + \underbrace{sh^2 y}$

da más grandes para y muy chicos o muy grandes, no está acotada ni en D ni en $\tilde{D}$

$\frac{1}{3!} +$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

32) c)

$$\lim_{z\to 0} \exp(-|z|^2) = \exp\left(\lim_{z\to 0} -|z|^2\right) = \exp(0) = 1$$

exponencial es continua

Prop

- g cont en w_0
- $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} g[f(z)] = \lim_{z\to z_0} g\left[\lim_{z\to z_0} f(z)\right]$$

32 a) $$\lim_{z\to\infty} \exp(z) = \lim_{z\to 0} \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \exp\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) \; ⊛$$

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$⊛ \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

C_1: $y=0$ $(z = x+i0)$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} e^{1/x}(1-i0) = \lim_{x\to 0} e^{1/x} \begin{cases} \nearrow \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \\ \searrow \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \end{cases} \Big\} \neq$$

con $a + \infty$ al cuadrado

C_2: $x=0$ $(z = 0+iy)$

$$L_2 = \lim_{y\to 0} 1\left(\cos(1/y) - i\,\text{sen}(1/y)\right) = \lim_{y\to 0} e^{-i\frac{1}{y}} \nexists L_2$$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{y\to 0} \cos(1/y) \\ \lim_{y\to 0} \text{sen}(1/y) \end{matrix}\right\} \nexists$$

$$\nexists \lim_{z\to\infty} \exp(z)$$

32) b) $f(z) = \exp(-z^2)$

$$\lim_{z\to\infty} \exp(-z^2) = \lim_{z\to 0} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

Tomar C_3: $z = x+ix$ $(y=x)$ y ver qué pasa

C_1: $z = x+i0$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

C_2: $z = iy$

$$L_2 = \lim_{y\to 0} \exp\left(\frac{-1}{(iy)^2}\right) = \lim_{y\to 0} \exp\left(\frac{1}{y^2}\right) = +\infty$$

$L_1 \neq L_2$ ∴ $\nexists \lim_{z\to\infty} \exp(-z^2)$

$$f(z) = \underbrace{\text{Arg}(z)}_{u(x,y)}$$

u cont en $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid x \le 0\}$

v cont en $\mathbb{R}^2$

$\overline{f(z)} = \text{Arg}(z)$

tenemos: $\left.\begin{matrix} f(z) = \overline{f(z)} \\ f \neq \text{cte} \end{matrix}\right\}$ f no es derivable $\forall z$.

f no derivable en ningún punto

$f(z) = \text{Log}(z)$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{0\}$

- Cont en $\mathbb{C} - \{(x,0) / x \le 0\}$
- Holomorfa en ↗

$f'(z) = 1/z$

33) b) iv) $f(z) = \mathrm{Log}(\cos^2 z)$

$f'(z_0) = ?$, $z_0 = \pi(1+i)$

$f(z) = \mathrm{Log}(z)$

D: dom de holomorfía

$D = \mathbb{C} - \{ z / \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0 \}$

$g(z) = \mathrm{Log}(\cos^2(z))$

$D = \mathbb{C} - \{ z / \mathrm{Re}(\cos^2(z)) \leq 0, \mathrm{Im}(\cos^2(z)) = 0 \}$

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} \cdot 2\cos(z) \, (-\mathrm{sen}(z))$$

$$f'(z) = -2 \, \frac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z} = -2 \, \mathrm{tg}\, z$$

$$f'(\pi(1+i)) = \frac{-2\,\mathrm{sen}(\pi + i\pi)}{\cos(\pi + i\pi)}$$

$\mathrm{sen}(\pi(1+i)) = \mathrm{sen}(\pi)\,\mathrm{ch}(\pi) + i \cos(\pi)\,\mathrm{sh}(\pi) = -i\,\mathrm{sh}(\pi)$

$\cos(\pi(1+i)) = \cos(\pi)\,\mathrm{ch}(\pi) - i\,\mathrm{sen}(\pi)\,\mathrm{sh}(\pi) = -\mathrm{ch}(\pi)$

$$f'(\pi(1+i)) = -2 \, \frac{(-i\,\mathrm{sh}\,\pi)}{-\mathrm{ch}\,\pi} = -2i \tanh(\pi)$$

34-c) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 3}$ $\begin{array}{l} \to \text{holom en } \mathbb{C} \\ \to \text{holom en } \mathbb{C} \end{array}$

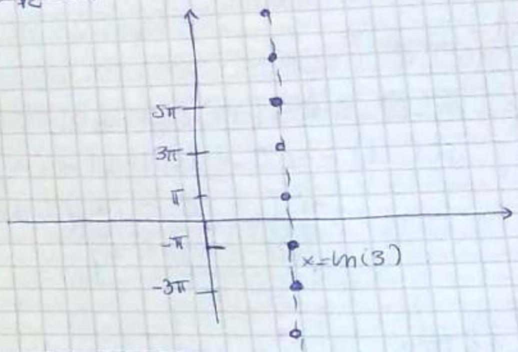
F holom en $\mathbb{C} - \{ z / e^z + 3 = 0 \}$

$z ? \, / \, e^z + 3 = 0$

$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = 3e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 3 \to x = \ln(3) \\ y = \pi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$z_k = \ln(3) + i\pi(2k+1), \; k \in \mathbb{Z}$



Logaritmo

$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg z$, $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$

Determinar una rama del log: es elegir cómo se miden los argumentos

La semirrecta $\{ z : \arg z = \alpha \}$ se denomina corte de rama

$z = 0$ punto de ramificación
es el punto que pertenece a todos los cortes de rama

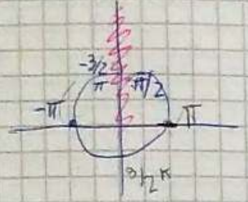
$\frac{1}{3!}$ +

En log ppal, $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $-\pi \leq \operatorname{Arg} z < \pi$
el corte de rama es $\{z : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

39 a - Sea $F(z)$ una rama del log cuyo corte de rama es la semirecta $\{z \; \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$

$F(1)$? $F(-ie)$? $F(-e+ie)$?

$F(z) = \ln|z| + i \arg z$



$F(z) = \ln|z| + i \arg z$

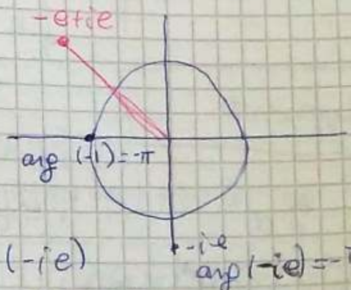
$F(-1) = -i\pi = \ln|-1| + i \arg(-1)$

$-i\pi = 0 + i \arg(-1)$

$\boxed{\pi = \arg(-1)}$

Luego:

$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z < \pi/2$



$F(1) = \ln|1| + i \arg(1)$
$= 0 + i0 = 0$

$F(-ie) = \ln|-ie| + i \arg(-ie)$ $\quad \arg(-ie) = -\pi/2$
$= \ln e + i\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1 - i\pi/2$

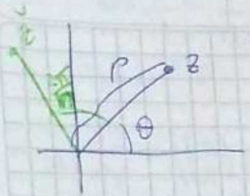
$F(-e+ie) = \ln|e+ie| + i \arg(-e+ie) = \ln|\sqrt{2}\, e| + i(-\frac{5}{4}\pi)$
$= \ln\sqrt{2} + \ln e - i\,5/4\,\pi = (\ln\sqrt{2}+1) - i\frac{5}{4}\pi$

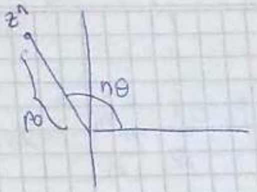
$\boxed{\text{Raíces n-ésimas}}$ inversas de z^n

$f(z) = z^n$; $\rho^n e^{i\theta} = \omega$ $\quad$ Resulta $|\omega| = \rho^n = |z|^n$

$\downarrow$ $\quad \arg \omega = n\theta + 2k\pi$

$z = \rho e^{i\theta}$





$z^n = \omega$

$z = "\sqrt[n]{\omega}"$

$z^n = \rho^n e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})n}$

$= \rho^n e^{i n\theta + 2\pi} = \rho^n e^{in\theta}$

z^n no es inyectiva

Se pueden construir inversas restringiendo el dominio

Dado ω, cuál es "el" z / $z^n = \omega$?

$|\omega| = |z|^n \rightarrow |z| = \sqrt[n]{|\omega|} = |\omega|^{1/n}$

$\arg \omega = n \arg z \Rightarrow$ "$\arg z$" $= \frac{\text{"}\arg \omega\text{"}}{n}$

$\boxed{z = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i\frac{\text{"}\arg\omega\text{"}}{n}}}$ ¿qué arg de ω tomamos?

$z = f^{-1}(\omega)$

Definimos la función raíz n-ésima:

$g(z) = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{n}}$ con $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$

- $\operatorname{Dom} g = \mathbb{C} - \{0\}$
- g es continua en el $\operatorname{Dom} g - \{z : \arg z = \alpha\}$
- g es derivable? $\quad g(z) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sqrt[n]{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$U(\rho,\theta) = \sqrt[n]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$V(\rho,\theta) = \sqrt[n]{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

CR: $U_\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)$ $\quad V_\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$V_\theta = \rho^{1/n}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{1}{n}$ $\quad U_\theta = \rho^{1/n}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\frac{1}{n}$

$$U\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{1}{\rho}\rho^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\rho}V\theta$$

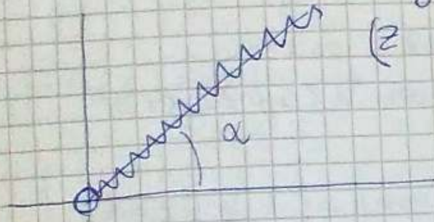
$$V\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{-1}{\rho}\frac{\rho^{1/n}}{n}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) = \frac{-1}{\rho}U\theta$$

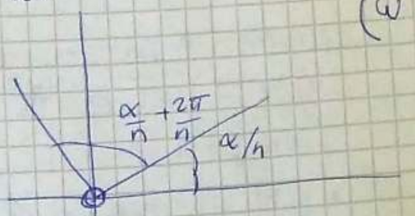
$\therefore$ g es derivable si $\rho > 0$, $\theta \neq \alpha$

$$g'(z) = (U\rho + iV\rho)\, e^{-i\theta}$$
$$= \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{-i\theta} = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1} e^{i\theta(1/n-1)}$$
$$= \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$$

- Imagen $\alpha \leq \arg(z) < \alpha + 2\pi$

$$\frac{\alpha}{n} \leq \underbrace{\frac{\arg z}{n}}_{\arg w} < \frac{\alpha + 2\pi}{n}$$





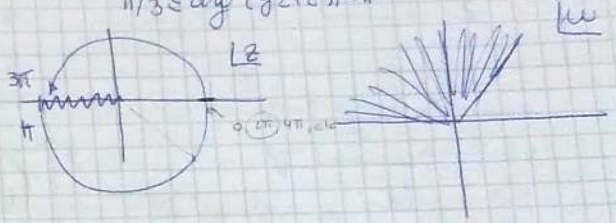
Ejemplo $g_1(z) = z^{1/3} = \rho^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-\pi \leq \arg z < \pi$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg g_1(z) = \frac{\arg z}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$g_1(z) = z^{1/3} = \rho^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-\pi \leq \arg z < \pi$

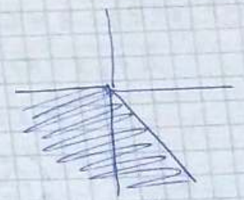
$g_2(z) = \rho^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $\pi \leq \arg z < 3\pi$

$\pi/3 \leq \arg(g_2(z)) < \pi$



$g_3(z) = \rho^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-3\pi \leq \arg z < -\pi$

$-\pi \leq \arg(g_3(z)) < -\pi/3$



Exponentes complejos

$f(z) = z^c$ $(c \in \mathbb{C})$

z^n, $n \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ $e^{c \cdot \log z}$ para cierta determinación de una rama del logaritmo

$\vdots$

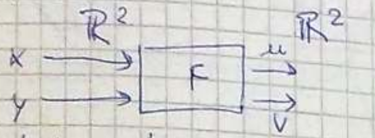
$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

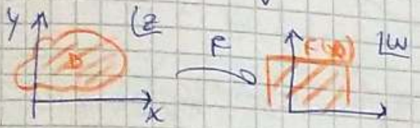
Continua en su dominio excepto en corte de rama

Holomorfa en su dominio, excepto en corte de rama

$$f'(z) = e^{c\log z} \cdot c \cdot \frac{1}{z} = e^{c\log z} \cdot c \cdot z^{-1}$$
$$= e^{c\log z} \cdot c \cdot e^{-\log z}$$
$$= c \cdot e^{c\log z - \log z}$$
$$= c \cdot e^{(c-1)\log z} = \boxed{c \cdot z^{c-1}}$$

FUNCIONES COMPLEJAS COMO TRASFORMACIONES EN EL PLANO



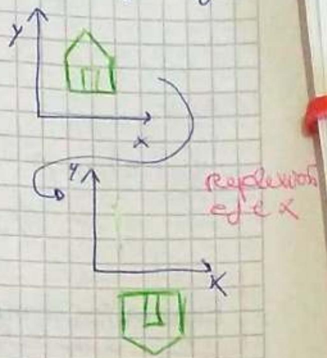


① $f(z)=\bar{z}$

$u+iv=\overline{x+iy}=x$

$u(x,y)=x$

$v(x,y)=-y$

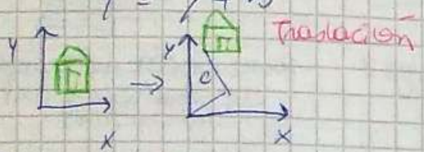


② $f(z)=z+c$, $c\in\mathbb{C}$

$u+iv=x+iy+a+bi$ $c=a+bi$

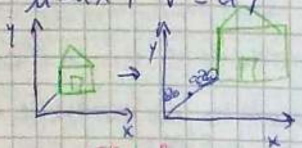
$u=x+a$

$y=y+b$



③ $f(z)=az$, $a\in\mathbb{R}^+$

$u=ax$, $v=ay$



Escala

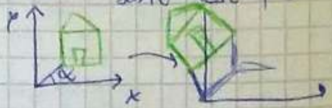
④ $f(z)=e^{i\theta}\cdot z=cz$ con $|z|=1$

$=(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)(x+iy)$

$u+iv=\cos\theta\, x-\text{sen}\,\theta\, y$

$+i(\cos\theta\, y+\text{sen}\,\theta\, x)$ Rotación

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta\\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



⑤ $f(z)=cz$ $c\in\mathbb{C}$, $c=\rho e^{i\theta}$

$=\rho e^{i\theta}z$ $\boxed{\text{rotación + escala}}$

⑥ $f(z)=cz+b$ $c\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{C}$

rotación + escala + traslación

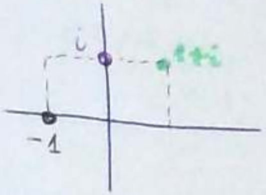
---

i a inf

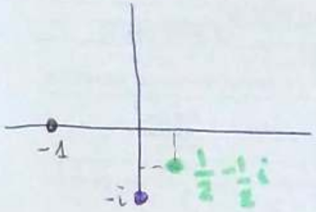
1+i a 1

-1 a i

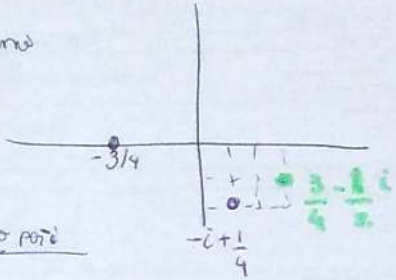
$\frac{1}{3!}$ +



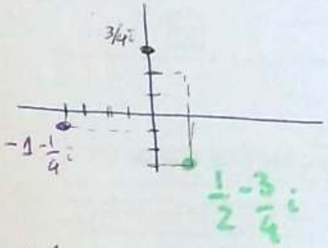
lo invierto



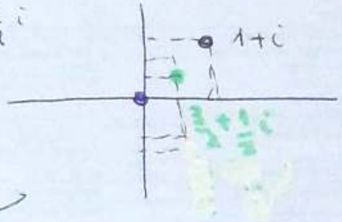
lo sumo 1/4



multiplico por i

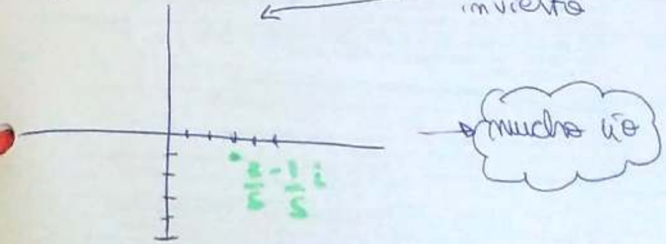


sumo $1+\frac{1}{4}i$



o2

invierto



Planteo $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$

$F(i)=\infty=\frac{a(i)+b}{c(i)+d}$

$F(-1)=i=\frac{a(-1)+b}{c(-1)+d}$

$F(1+i)=1=\frac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d}$

MARCONI LH, ETSI

Cost effective high capacity microwave transmission over long distances

The Marconi LH (Long Haul) microwave system offers rapid roll-out of high transmission capacity with SDH compatibility and integrated network management. Based on long experience in Trunk Radio, this modern long-haul radio system is a more cost efficient solution than fiber in many applications such as fast modification of network topologies, and the rapid roll-out of backbone and feeder networks.

High integration, lowest cost of ownership
Marconi LH can also be used as a redundancy to fiber or when long hop-lengths are needed under difficult conditions. The modern, scalable and highly integrated design provides lowest cost of ownership in all parts of the products life cycle: deployment, expansion and operation.

Key features/benefits

- STM-1 transmission, upgradeable to transparent STM-4
- Rapid roll-out
- Frequencies from 3.6 to 13 GHz
- Optimum spectrum efficiency through 64 MLQAM, 128 MLQAM and XPIC (Cross Polarization Interference Canceller)
- Full software download capability
- Outstanding compact building practice and low power consumption
- Highly robust system architecture providing high MTBF (Mean Time Between Failure)
- Multiple protection schemes
- The modern design provides lowest cost of ownership
- Plug and Play for Spare Part Handling

Greater frequency band utilization
Up to ten RF channels can be used, depending on the frequency pattern. Using XPIC, each RF channel can be used on two polarizations, thus doubling the transmission capacity. This means that up to twenty STM-1 or five STM-4 signals can be transmitted via a single antenna.

ERICSSON

---

⑦ $f(z) = z^2$

$u + iv = x^2 - y^2 + 2xy\,i$

$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy$

¿cómo transforma la red cartesiana?

conjunto de rectas

$x = cte \; , \; y = cte$

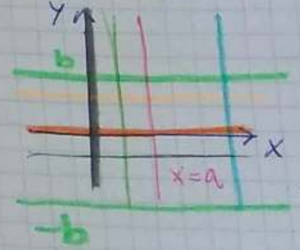
$\frac{1}{3!}$ +

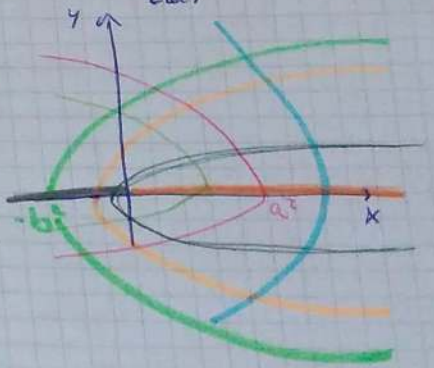
$x = a$ se transforma en:

$u = a^2 - y^2 \quad , \quad v = 2ay \qquad y \in \mathbb{R}$

$\gamma(y) = (u(y), v(y)) = (a^2 - y^2, 2ay)$

si $a \neq 0 \quad y = \frac{v}{2a} \qquad u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2$





$y = b$ se transforma en

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 - b^2 \\ v = 2xb \end{array}\right\} \quad \text{si } b \neq 0, \; x = \frac{v}{2b}$$

$$u = \left(\frac{v}{2b}\right)^2 - b^2$$

Familias ortogonales de parábolas

$\frac{1}{2}$

Hasta el 39

$y = 0$ se transforma

$u = x^2$

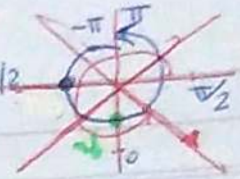
$v = 0$

$x = 0$ se transforma en

$u = -y^2$

$v = 0$

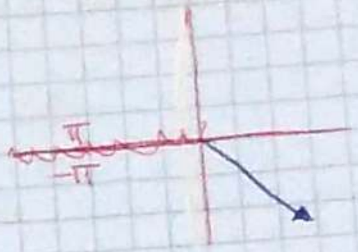
No



[illegible]
$2\pi - \frac{\pi}{4}$

Cosas pendientes

(25)



b) $\mathrm{Log}(1-i) = \mathrm{Lg}(e^{\pi i}\sqrt{2})$

$= \ln|\sqrt{2}| + i\,\mathrm{arg}(1-i)$

$= \ln|\sqrt{2}| - i\frac{\pi}{4}$

c) $(-i)^{2i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arg ppal}}}{=} (e^{-i\pi/2})^{2i} = e^{-i\frac{\pi}{2}2i} = e^{\pi}$

(26) b) $\exp(i\pi/2) = e^{0}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + ie^{0}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = i$

c) $\exp(z+i\pi) = -\exp(z)$

$= e(x+yi+i\pi) = e^{x}\cos(y+\pi) + ie^{x}\,\mathrm{sen}(y+\pi)$

$= -e^{x}\cos(y) - ie^{x}\,\mathrm{sen}(y) = -\exp(z)$

d) $\overline{\exp z} = \overline{e^{x}\cos y + ie^{x}\,\mathrm{sen}\, y} = e^{x}\cos y - ie^{x}\,\mathrm{sen}\, y$

$= e^{x}\cos(-y) + ie^{x}\,\mathrm{sen}(-y)$

$= \exp(\bar{z})$

$-\mathrm{sen}(y) = \mathrm{sen}(-y)$

$\cos(y) = \cos(-y)$

$\cos(y+\pi) = -\cos(y)$

$\mathrm{sen}(y+\pi) = -\mathrm{sen}(y)$

27) ⓐ

$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$

sii

$\boxed{z = k\pi}$

- $\exp(i(x-iy)) = \exp(y+ix)$

$= e^{y}\cos(x) + ie^{y}\,\mathrm{sen}(x)$

- $\overline{\exp(iz)} = e^{-y}\cos(x) - ie^{-y}\,\mathrm{sen}(x)$

$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ sii

$e^{y}\cos(x) = e^{-y}\cos(x)$

$e^{y}\,\mathrm{sen}(x) = -e^{-y}\,\mathrm{sen}(x)$

si $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow e^{y} = -e^{-y}$ sii $y=0$

si $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \text{sen}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k \neq 0$

en (2) $e^{y} = -e^{-y}$ Abs

si $y=0 \Rightarrow \text{sen}\, x = -\text{sen}\, x \Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0$

sii $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{z} = k\pi + i0}$

b) $\cos(i\bar{z}) = \cos(i(x-iy)) = \cos(y+ix)$

$$= \frac{e^{i(y+ix)} + e^{i(-(y+ix))}}{2}$$

$\parallel$ se cumple siempre

$$\overline{\cos(iz)} = \overline{\cos(i(x+yi))} = \overline{\cos(-y+ix)} = \overline{\frac{e^{i(-y+ix)} + e^{i(-(-y+ix))}}{2}}$$

c) $$\text{sen}(i\bar{z}) = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}}{2i} \ (*)$$

$$\overline{\text{sen}(iz)} = \overline{\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}} = \overline{\frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}}$$

$$= \overline{\frac{e^{ix-y}}{2i}} - \overline{\frac{e^{-ix}e^{y}}{2i}} = \overline{\frac{-i}{2}e^{ix-y}} - \overline{\left(\frac{-i}{2}\right)e^{-ix}e^{y}}$$

$$= \frac{i}{2}e^{-ix-y} - \frac{i}{2}e^{ix}e^{y}$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^{-ix}e^{-y} - e^{ix}e^{y}\right)$$

$$= \frac{e^{i\pi/2}}{2}\left(e^{-ix}e^{-y} - e^{ix}e^{y}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{-ix+\pi/2}e^{-y} \overset{\overset{e^{i\cdot\pi}}{\uparrow}}{-} e^{ix+\pi/2}e^{y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-ix+\pi/2-y}e^{} + e^{ix+\frac{3}{2}\pi}e^{y}\right)$$

$\frac{1}{3!}+$

(*) $$\frac{-ie^{ix}e^{y} + ie^{-ix}e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{-e^{i\pi/2}e^{ix}e^{y} + e^{i\pi/2}e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{-e^{i(x+\pi/2)}e^{y} + e^{i(\pi/2-x)}e^{-y}}{2} = \frac{-e^{-i(x-\pi/2)}e^{-y} + e^{i(x+\pi/2)}e^{y}}{2}$$

$$-e^{i(x+\pi/2)}e^{2y} + e^{\overset{\downarrow}{i(\pi/2-x)}} = -e^{\overbrace{-i(x-\pi/2)}^{i(-x+\pi/2)}} + e^{i(x+\pi/2)}e^{2y}$$

sii $$2e^{i(\pi/2-x)} = 2e^{i(x+\pi/2)}e^{2y}$$

$\boxed{y=0} \rightarrow \pi/2 - x = x + \pi/2$

$-x = x \rightarrow \boxed{¿x=0?}$ ¡No!

... mucho lío, le creo que $\boxed{\text{sen}(i\bar{z}) = \overline{\text{sen}(iz)} \text{ si } z = k\pi i}$

(28) sen $z = 0$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$e^{2iz} - 1 = 0$$

① $\rightarrow x_1 = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

(-1) $\rightarrow x_2 = \pi + 2k'\pi = (2k'+1)\pi$

$\rightarrow x = k\pi$

$w = e^{iz} \Rightarrow w^2 - 1 = 0$

$w^2 = 1$

$\boxed{w = \pm 1}$

$\frac{1}{z}$

$y=0$

$e^{ix} = e^{i0} \vee$

$e^{ix} = e^{i\pi}$

$\rightarrow x = 0 \vee x = \pi$

$e^{iz} = \pm 1$

$\underbrace{e^{-y}}_{|\pm 1|} e^{ix} = \pm 1 \rightarrow$ $x = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$= e^{0} \cdot e^{\pm i(}$

$e^{-y} = \pm 1 \xrightarrow{y=} \ln(\pm 1) = 0$

¿Por qué me faltan soluc?

37-b)

$$f(z) = \log\left(\frac{1}{z(z-1)}\right)$$

$$D_f = \mathbb{C} - \left\{ z / \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) \leq 0 \, ; \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = 0 \right\}$$

$$\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{1}{z(z-1)} \cdot \frac{\bar{z}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{\bar{z}(\bar{z}-1)}{|z|^2|z-1|^2} = \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}}{|z|^2|z-1|^2}$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{(x-iy)^2 - (x-iy)}{(x^2+y^2)\left((x-1)^2+y^2\right)}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{x^2-y^2-x}{(x^2+y^2)\left((x-1)^2+y^2\right)} \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-y^2-x \leq 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{-2xy+y}{(x^2+y^2)\left((x-1)^2+y^2\right)} = 0$$

sii

$$-2xy+y = 0 \quad (1)$$

Si $y = 0$ en (2) $x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0$

$\boxed{\begin{matrix} y=0 \\ x\in[9,2 \end{matrix}}$

Si $\frac{\cancel{1} - 2x}{(x=1/2)} = 0$ en 2 $\Rightarrow$ $x^2 - x \leq 0$ si x

$$\frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$-\frac{1}{4} - y^2 \leq \rightarrow$$ se cumple $\forall r$

logα

31\. Probar que:

(a) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$ ✓

(b) $|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$

(c) $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \cos^2(y) = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$

f

$\frac{1}{3!}$ +

32\. Determinar si existen los siguientes límites en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$:

(a) $\lim_{z\to\infty} \exp z$ (b) $\lim_{z\to\infty} \exp(-z^2)$ clase (c) $\lim_{z\to 0} \exp(-|z|^2)$ clase OK

33\. (a) Para las funciones del ejercicio 29, determinar los puntos en que son continuas, derivables y/o holomorfas.

(b) Calcular $f'(z)$ en $z = z_0$, siendo:

(i) $f(z) = \operatorname{sh}(\operatorname{sen} z)$ $z_0 = \pi/4$ (ii) $f(z) = \exp(2\operatorname{ch} z)$ $z_0 = i$

(iii) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ $z_0 = 2i$ (iv) $f(z) = \operatorname{Log}(\cos^2 z)$ $z_0 = \pi(1+i)$ clase

34\. Estudiar continuidad y holomorfía de:

(a) $f(z) = \operatorname{tg} z$ / (b) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$

(c) $f(z) = \frac{1}{\exp z + 3}$ (d) $f(z) = \frac{1}{(\exp z - 1)(\operatorname{sen}(1+i)z)}$

$$\boxed{g = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}}$$

(e) $f(z) = e^{(x^2-y^2)}(\cos(2xy) + i\operatorname{sen}(2xy))$

(f) $f(z) = \operatorname{sen}(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}})\operatorname{ch}(\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}) - i\cos(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}})\operatorname{sh}(\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}) = \overline{\operatorname{sen}(g)}$

35\. Hallar todos los valores de $\log(1+i)$ y de $(1+i)^{3+4i}$. ✓

$\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$\log(z_1) = \ln|z_1| + i\arg(z_1)$

$-\log(z_2) \,|\, -\ln|z_2| - i\arg(z_2)$

N 36. Comprobar que:

(a) $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$

(b) $\log z_1 - \log z_2 = \log\frac{z_1}{z_2}$ pero $\operatorname{Log}(-1-i) - \operatorname{Log} i \neq \operatorname{Log}(\frac{-1-i}{i})$

(c) $z^a z^b = z^{a+b}$

(d) $\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

(e) $\log z^a = a\log z$ pero $\operatorname{Log} i^3 \neq 3\operatorname{Log} i$

$\log(-1-i) = \ln|-1-i| + \operatorname{Arg}(-1-i)$

$-\log(i) \quad -\ln|i| - \operatorname{Arg}(i)$

$= \ln\left|\frac{1-i}{i}\right| + \operatorname{Arg}(-1-1)$

$-\operatorname{Arg}(i)$

f

37\. Para cada una de las siguientes funciones, describir el mayor dominio posible de holomorfía y calcular su valor en $z = i$:

(a) $f(z) = \operatorname{Log}(2z+i)$ (b) $f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right)$ x este con duda

38\. Determinar los puntos de ramificación y uniformizar las siguientes funciones:

(a) $(z-1+i)^{\frac{1}{2}}$ (b) $((z-i)(z-1))^{\frac{1}{2}}$ clase (c) $\log((z-2i)(z+3i))$

$\frac{1}{z}$

$D_f = \mathbb{C} - \{ z = x + iy ,\ y = 0\ x \in [0,1] \} \cup \{ z = \frac{1}{2} + iy ,\ y \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{3!}$ +

$f(i) = \operatorname{Log} \left(\frac{1}{i(i-1)} \right) = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{3}{4} \pi$

38 - $\tilde{b}$)

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} \qquad z^{\omega} = e^{\omega \log(z)}$$

$$\parallel$$

$$e^{\frac{1}{2} \log(z^2-1)}$$

¿Puntos ramificación? z tal que $z^2 - 1 = 0 \begin{cases} \nearrow z = 1 \\ \searrow z = -1 \end{cases}$

"UNIFORMIZAR" → elija un "corte para log"

F1) Elijo $f(z) = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z^2 - 1)}$ $\qquad z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + i2xy$

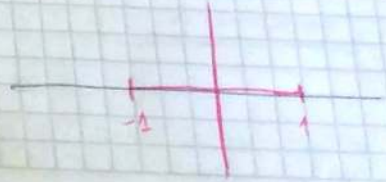
Corte $= \{ z / \operatorname{Im}(z^2-1) = 0 ,\ \operatorname{Re}(z^2 - 1) \leq 0 \}$

$\operatorname{Im}(z^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow 2xy = 0$

$\operatorname{Re}(z^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 1 \leq 0$

Si $x = 0$ en (2): $-y^2 - 1 \leq 0\ \forall y \in \mathbb{R}$

Si $y = 0$ en (2) $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$



$D_{f_1} = \mathbb{C} - \{ z = + \}$

2) Elijo $\alpha = 0$

3) $\alpha = \pi/2$

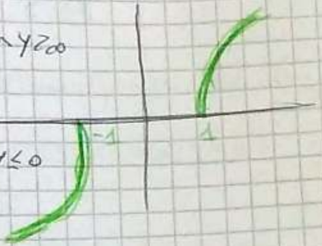
$$f_3(z) = e^{\frac{1}{2}\log_{\frac{\pi}{2}}(z^2-1)}$$

corte $= \{ z / Re(z^2-1) = 0 \ , Im(z^2-1) \geq 0 \}$

$2xy \geq 0$; $x^2 - y^2 - 1 = 0$

1

$xy \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ ó \\ x \leq 0 \ ó \ y \leq 0 \end{cases}$



39-b) $G(z) = 1 + z^{1/3}$

$z^{1/3}$ def en $\mathbb{C} - \{ z / z = iy , y \geq 0 \}$,

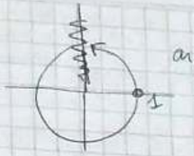
$1^{1/3} = 1$

$$z^{1/3} = e^{1/3 \log z} = |z|^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$$

$$|1|^{1/3} e^{i\frac{\arg(1)}{3}} = 1 = e^{i2k\pi}$$

$\arg 1 = 6k\pi$

$\boxed{\text{tomamos } k = 0}$



$\arg 1 = 0$

Luego tomamos

$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$

$G(-1) = 1 + (-1)^{1/3}$
$= 1 + |-1|^{1/2} \cdot e^{\frac{i\arg(-1)}{3}}$
$= 1 + e^{\frac{i\arg(-1)}{3}} = 1 + e^{\frac{-i\pi}{3}}$
$= 1 + \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
$= \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{3!} +$

$G(-i) = 1 + (-i)^{1/3} = 1 + |-i|^{1/3} \cdot e^{\frac{i\arg(-i)}{3}}$
$= 1 + 1 \cdot e^{\frac{i\arg(-i)}{3}} = 1 + e^{\frac{i\pi}{6}} = 1 + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

40-a) $1^{1/2} = 1$ $\quad (-1)^{1/2} = i$
$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

Si $z = x$, $x > 0$ $\quad x^{1/2} = |x|^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}} = x^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}}$
$|z|$ x $\quad = \sqrt{x}\, e^{i\frac{\arg z}{2}} = \sqrt{x}$

↓ se cumple para $2k\pi$

Tomamos $\arg z = 0$ si $z = x$, $x > 0$

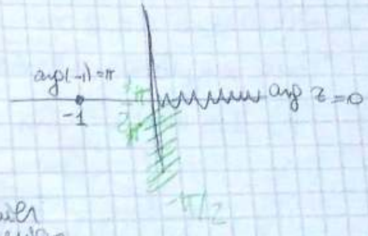
Además, $(-1)^{1/2} = i$

$$\underbrace{|-1|^{1/2}}_{1} e^{\frac{i\arg(-1)}{2}} = i = e^{i\pi/2}$$

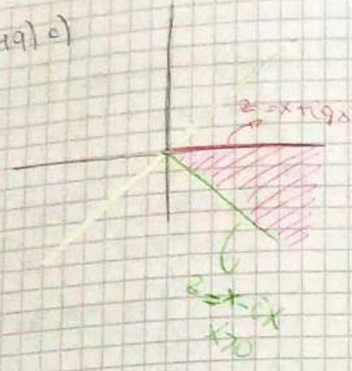
Tomamos $\arg(-1) = \pi$

$-\pi/2 < \arg z < \frac{3}{2}\pi$

no es única, puede tomarse el corte en cualquier semirecta del semip. inferior



49) c)



$$\boxed{z^2 = w = u + iV = x^2 - y^2 + 2xyi}$$

$u = x^2 - y^2$

$V = 2xy$

los puntos $z = x + i0$, $x>0$ se transf en

$u = x^2 \geq 0$

$V = 0$

Los puntos $z = x - ix$, $x>0$ se transforman

$u = x^2 - (-x)^2 = 0$

$V = 2x(-x) = -2x^2$

$D = \{ z / -\pi/4 < \arg z < 0 \}$

$z^2 = |z|^2 e^{i 2 \arg z} = w$

$-\frac{\pi}{2} < \arg w = 2 \arg z < 0$

$f(z) = 1/z$

$w = 1/z = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$

$zw = 1$

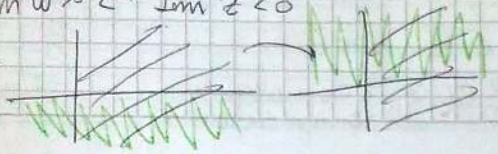
$|z||w| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } |z| < 1 \Rightarrow |w| > 1 \\ |z| = 1 \Leftrightarrow |w| = 1 \end{array}\right\}$$ lleva int de circunf de radio 1 en exterior de circunf de radio 1.

$u = \operatorname{Re} w > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > 0$

"lleva semiplano derecho en semiplano derecho"

$v = \operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z < 0$



$\operatorname{Im}(0) = \infty$ en el plano w

Si $\underbrace{|z| - \varepsilon}_{\text{chico}} \Leftrightarrow \underbrace{|w| = \frac{1}{\varepsilon}}_{\text{grande}}$

circunferencias

$a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0$

Recta

$bx + cy + d = 0$

Rectas y circunf.
Si a=0 recta,
e.o.c. circunf.
si d=0, pasa por el origen.
d≠0 no pasa por el origen

$w = \frac{1}{z}$ sii $z = \frac{1}{w}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x - \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{array}}$$

$x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - \frac{iv}{u^2+v^2}$

Reemplazando en ⊛

$$a\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 \right) + b\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

$$a\left(\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} \right) + b\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

$$a + bu - cv + d(u^2+v^2) = 0$$

a \ d	d=0	d≠0
a = 0	recta por el origen ↓ recta por el org	recta no por origen ↓ circunf x origen 
a≠0		

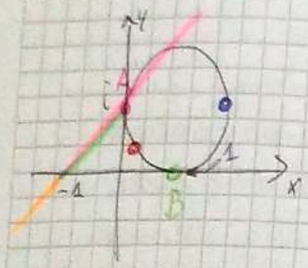
$\frac{1}{3!}$ +

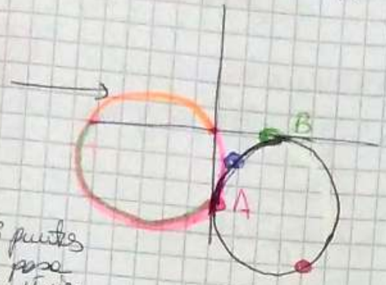
$C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$

$y = \frac{-v}{u^2+v^2}$





Por 3 puntos
pasa
una única
circunferencia

$L_1 : y = x + 1$

$0 = x - y + 1$

$\frac{u}{u^2+v^2} - \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + 1 = 0$

$u + v + u^2 + v^2 = 0$

$\left(u + 1/2\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = 1/2$

Homográfica

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$
$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$a \neq 0$
$c \neq 0$

$= \frac{a(z+b/a)}{c(z+d/c)} = \frac{a}{c} \frac{(z + d/c - d/c + b/a)}{(z + d/c)}$

$= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{(b/a - d/c)}{z + d/c}\right]$

$= \frac{a}{c} + \frac{cb - da/c^2}{z + d/c}$

$= \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2} \frac{(bc - ad)}{z + d/c}$

$= \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2} \frac{(bc - ad)}{z + d/c} = \boxed{\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}}$

$\boxed{\text{si } ad - bc = 0}$

$f(z) = a/c$

La homográfica con $c \neq 0$, $a \neq 0$ es compos de:

rotación y escala (cz)

traslación $(cz + d)$

inversión $(1/(cz+d))$

rotación y escala $\left(\frac{bc-ad}{c} \frac{1}{cz+d}\right)$

traslación $\left(\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}\right)$

$\boxed{\text{si } c = 0}$ $f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ rotación y escala + traslación.

$\boxed{\text{si } a = 0}$ $f(z) = \frac{b}{cz+d}$ rotación y escala, traslación, inversión, rotación y escala

Ej: $f(z) = \frac{2z+3}{iz-1} = \frac{2(z+3/2)}{i(z+i)} = \frac{2}{i}\left[\frac{z + i - i + 3/2}{z+i}\right]$

$= \frac{2}{i}\left(1 + \frac{3/2 - i}{z+i}\right) = \frac{2}{i} + \frac{\frac{2}{i}\left(\frac{3}{2} - i\right)}{z+i} = \frac{2}{i} + \frac{\left(\frac{3}{i} - 2\right)}{z+i}$

Esta f es composición de:

$f_1(z) = z + i = z_1$

$f_2(z_1) = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z+i} = z_2$

$f_3(z_2) = \left(\frac{3}{i} - 2\right) z_2 = \frac{3/i - 2}{z+i} = z_3$

$f_4(z_3) = z_3 + \frac{2}{i} = \frac{3/i - 2}{z+i} + 2/i = f(z) = w$

La homográfica transforma rectas y circunf en rectas y circunf.

Exponencial $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$

$w = e^z$

$u + iv = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$

$u = e^x \cos y$

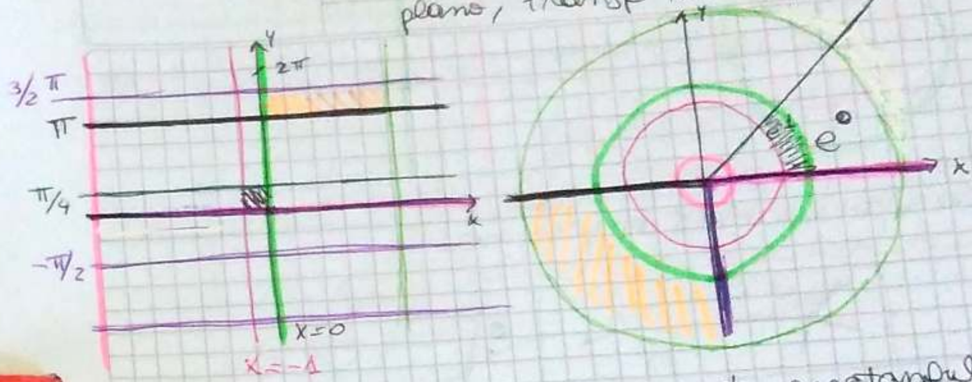
$v = e^x \operatorname{sen} y$

¿Cómo transforma la red cartesiana (conj de rectas $x = cte$, $y = cte$)

$x = a$

$$\begin{cases} u = e^a \cos(y) \\ v = e^a \operatorname{sen}(y) \end{cases}$$

→ se transforma en circunferencia de radio e^a



Lo cubre infinitas veces al plano, transf no biyectivas

La exponencial transforma sectores rectangulares en sectores circulares.

Si queremos una transf biyectiva, restringimos los z.

Logaritmo $w = f(z) = \log_\alpha(z) = \ln(z) + i \arg z$

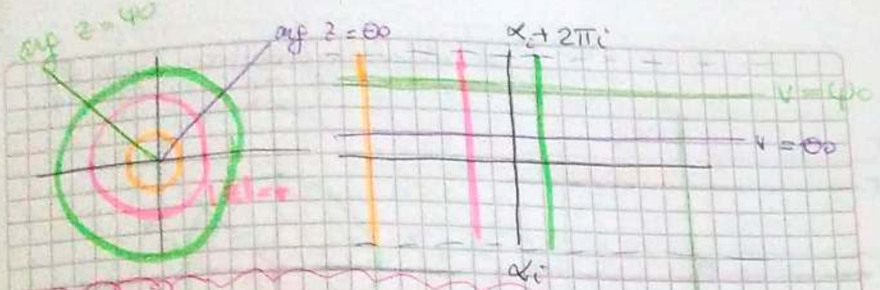
$\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$

$$\begin{cases} u = \ln|z| \\ v = \arg(z) \Rightarrow \alpha < v < \alpha + 2\pi \end{cases}$$

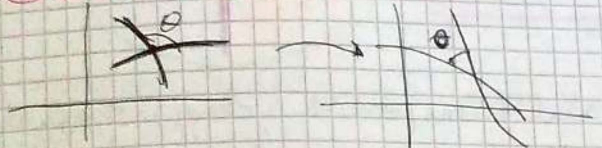
¿Cómo transforma la red polar?

$|z| = r \quad r\ cte \Rightarrow u = \ln r = cte$

$\arg z = \theta_0 \quad \theta_0\ cte \rightarrow v = \theta_0$



transformaciones conformes



Una transformación $w = f(z)$ es conforme en z_0 si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ una curva en el plano complejo, $z(t_0) = z_0$

Sea f conforme en z_0.

La Imagen de esta curva es:

$$w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$
$$= U(t) + iV(t)$$

La velocidad de $w(t)$:

$$w'(t) = \frac{d}{dt}\left(U(t) + iV(t)\right) = \frac{dU(t)}{dt} + i\frac{dV(t)}{dt}$$

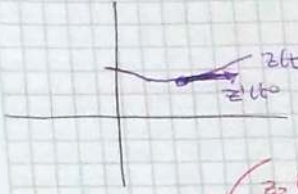
f conforme en z_0 f es derivable en z_0.

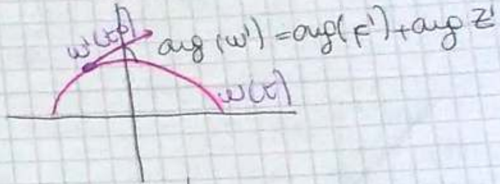
$$= u'_x x' + u'_y y' + i\left(V_x' x' + V_y' y'\right)$$
$$= (u'_x + iV'_x)\, x' + (u'_y + iV'_y)\, y'$$
$$= (u'_x + iV'_x)\, x' + i(V'_y - iu'_y)\, y'$$
$$\underset{CR}{=} (u'_x + iV'_x)\, x' + i(u'_x + iV'_x)\, y = \overbrace{\overbrace{(u'_x + iV'_x)}^{f'(z_0)}\overbrace{(x' + iy')}^{z'(t_0)}}^{w'(t_0)}$$

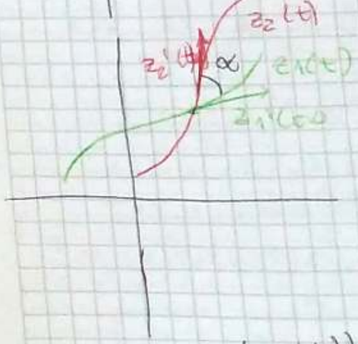
f conforme en z_0 $f'(z_0) \neq 0$

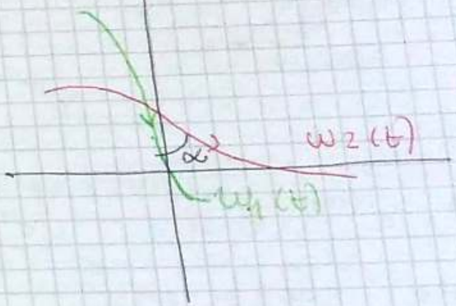
$f'(z_0) \neq 0$

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))$$









$$\arg(z_1'(t)) + \alpha = \arg(z_2'(t))$$

θ $\arg(z_2'(t)) - \arg(z_1'(t)) = \alpha$

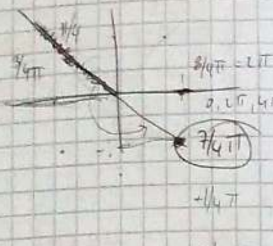
$$\arg(w_2'(t)) - \arg(w_1'(t)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z_1'(t_0)) - \left[\arg(f'(z_0)) + \arg(z_2'(t_0))\right]$$
$$= \arg(z_2'(t_0)) - \arg(z_1'(t_0))$$

se mantiene α

$\log_\alpha z = \ln|z| + i\,\arg(z)$, $\alpha \leq \arg(z) \leq \alpha + 2\pi$

$e^{\log_\alpha z} = e^{\ln|z|}\, e^{i\arg(z)} = |z|\,\frac{z}{|z|} = z$

$e^{i\arg(z)}$



$\arg(1-i) = -\pi/4 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{4}\pi \leq \arg(z) < \frac{11}{4}\pi$

euler

$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}\, e^{ix}$ | $e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$z = r e^{i\theta} = r\cos\theta + i\, r\,\text{sen}\,\theta$

$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\text{sen}(3+2i) = \frac{e^{-2+3i} - e^{2-3i}}{2i}$

$\log(z) = (\ln|z| + i\,\overset{\text{multivaluado}}{\arg(z)})$

$\arg(z) = \alpha \;/\; e^{i\alpha} = \frac{z}{|z|}$

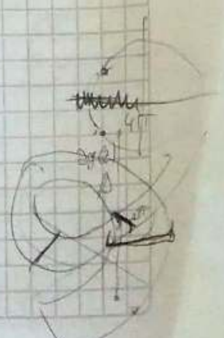
$\arg(z) = \alpha_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^{\log z} = z$

$e^{\ln|z|}\, e^{i\arg(z)} = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z$ ✓

$\text{Arg}(z) = \arg(z) \;/\; \lambda \leq \arg(z) < \lambda + 2k\pi$

$\text{Log}(z) = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z)$



(28) b) $\cos(z) = 0$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad z \neq 0$

$e^{i2z} + 1 = 0$

$e^{i2z} = -1$

$e^{iz} = \omega$

$\omega^2 = -1$

$\omega \to i = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$

$\omega \to -i = e^{i(-\pi/2 + 2k\pi)}$

$\omega = e^{i(\pi/2 + k\pi)}$

$e^{iz} = \pm i$

$$e^{iz} = \boxed{\begin{aligned} e^{-y} e^{ix} &= i \\ e^{-y} e^{ix} &= -i \end{aligned}}$$

(1) $\lambda = 1$

(2) $x = \pi/2 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$

(3) $\lambda = 1$

(4) $x = -\pi/2 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$

$\to \boxed{x = \pi/2 + 2k\pi}$

$$\boxed{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i0 \;;\; k \in \mathbb{Z}}$$

c) $\cos(z) = 10$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 10$

$e^{iz} + e^{-iz} = 5$

$e^{2iz} + 1 - 5e^{iz} = 0$

$\omega^2 - 5\omega + 1 = 0$

$\omega = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$e^{iz} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$e^{-y} e^{ix} = \left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) e^{i(0 + 2k\pi)}$

$y = -\ln\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) ; \; x = 0 + 2k\pi$

$$\boxed{z_{1,2\,k} = -\ln\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) i + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}}$$

$\frac{1}{3!} +$

e) $\boxed{\operatorname{sen} z = a}$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=a$$

$$e^{iz}-e^{-iz}=2ia$$

$$e^{2iz}-1-2iae^{iz}=0$$

$$w^2-2iaw-1=0$$

$$w=\frac{-(-2ia)\pm\sqrt{(-2ia)^2-4(-1)}}{2}$$

$$w=\frac{2ia\pm\sqrt{-4a^2+4}}{2}$$

$$w=\frac{2ia\pm\sqrt{4(-a^2+1)}}{2}$$

$$w=\frac{2ia\pm\sqrt{1-a^2}\,2}{2}$$

$$\boxed{w=2ai\pm\sqrt{1-a^2}}$$

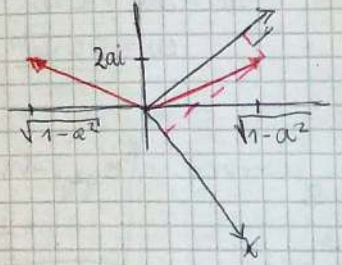
$$|w|=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{1-a^2})^2}=\sqrt{4a^2+1-a^2}=\boxed{\sqrt{3a^2+1}}$$

atan2(y, x)

$$e^{iz}=e^{ix}e^{-y}=2ai\pm\sqrt{1-a^2}$$

$$e^{-y}=\sqrt{3a^2+1}$$

$$\boxed{y=-\ln\left(\sqrt{3a^2+1}\right)}$$



$e^{iz}=w$

$\operatorname{Log}(e^{iz})=\operatorname{Log}(w)$

$iz=\operatorname{Log}(w)$

$z=-i\operatorname{Log}(w)=-i\,(\ln|w|+i\operatorname{Arg}(w))$

$\boxed{w=2(c+di)\pm\sqrt{1-(c^2-d^2+2icd)}}$

$z=x+iy$

$z^2=x^2-y^2+2ixy$

$\arg(z)=\operatorname{arctg}\left(2x+\right.$

$2c+2di\pm\sqrt{1-c^2+d^2-2icd}$

debe quedar así

Poshito haciendo lío

$$\operatorname{se}(z)=\operatorname{se}(\overset{z}{c+di})=\frac{e^{i(c+di)}-e^{-i(c+di)}}{2i}$$

$$=\frac{e^{ic}e^{-d}-e^{-ic}e^{d}}{2i}$$

$$2i\operatorname{se}(z)=e^{-d}e^{ic}-e^{d}e^{-ic}=e^{\frac{d}{2}}\left(e^{ic}-e^{-ic}\right)$$

cos(c) + i sen(c)

$$=e^{-(\frac{d}{2}-\frac{d}{2})}e^{ic}-e^{\frac{d}{2}+\frac{d}{2}}e^{-ic}$$

$\frac{1}{3!}+$

---

f) $$\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{e^{z}-e^{-z}}=\frac{\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)}$$

esto para la guía es cosh, lo cual es una mala abreviatura

$$e^{-z}+e^{z}=\frac{1}{2}e^{z}-\frac{1}{2}e^{-z}$$

$$\frac{3}{2}e^{-z}=-\frac{1}{2}e^{z}$$

$$\frac{3}{\cancel{2}}=-\frac{1}{\cancel{2}}e^{2z}\Rightarrow -e^{2z}=3$$

$$-e^{2(x+iy)}=3$$

$$-\left[e^{2x}\bullet e^{i2y}\right]=3$$

$$e^{2x}e^{i2y}=-3=3e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$e^{2x}=3$$

$$e^{i2y}=e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=\dfrac{\ln(3)}{2}\\[2ex] y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}}$$

$$\cosh(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$e^{z}+e^{-z}=1$$

$$e^{2z}+1=e^{z}\qquad w=e^{z}$$

$$w^2-w+1=0$$

$$w=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|w|=1$$

$$\arg(w)=\begin{cases}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

$\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$$e^{z}=e^{x}e^{iy}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=|w|e^{i\arg w}$$

$$e^{x}=1\rightarrow\boxed{x=\ln(1)=0}$$

$$e^{iy}=e^{i\arg w}\Rightarrow\boxed{y=\frac{\pi}{3}+k\pi}$$

$(\mathrm{Log}\, z)^2 + \mathrm{Log}\, z = -1$

$w = \mathrm{Log}\, z$

$w^2 + w + 1 = 0$

$\to w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$|w| = 1$

$\mathrm{Log}\, z = -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\ln r = -1/2 \to r = e^{-1/2} = |z|$

$i\theta = \pm\sqrt{3}/2\, i \to \theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Arg}(z)$

$-\pi \leq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \pi$ ✓

$$\boxed{z_{1,2} = e^{-1/2}\, e^{i(\pm\sqrt{3}/2)}}$$

(29) i) $f(z) = \exp(z)$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C} = \mathrm{Im}\, f$

$f(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$

$\mathrm{Re}(\exp(z)) = e^x \cos(y)$

$\mathrm{Im}(\exp(z)) = e^x\, \mathrm{sen}(y)$

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = 1 \cdot e^z \Rightarrow$ La función exponencial es periódica con período $2\pi i$

$\exp(z) \to 0$ sii $z = -\infty$

- $\exp(z)$ es dif ya que u, v son dif. por ser compos. de trig con exp.
- CR

$u_x = v_y = e^x\cos(y) = e^x\cos(y)$ ✓ Se cumple $\forall \mathbb{R}^2$

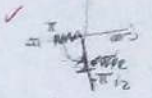
$u_y = -v_x = -e^x\cos(y) = -e^x\cos(y)$ ✓

$\hookrightarrow$ $\boxed{f \text{ es entera}}$

Funciones Elementales y Multiformes

24. Para las siguientes funciones:

(i) $f(z) = az + b$ (ii) $f(z) = \frac{1}{z}$ (iii) $f(z) = \bar{z}$ (iv) $f(z) = z^2$ (v) $f(z) = |z|$ ✓



(a) Indicar dominio, imagen y puntos de continuidad.

(b) Hallar la relación inversa indicando si es univaluada o multivaluada.

25. Escribir las siguientes expresiones en forma binomial:

$\ln|1| + i\,\mathrm{Arg}(i)$

(a) e^{2+i2} (b) $e^3 e^{i2}$ (c) e^i

$e^{\log(-i)\,2i}$

(d) $\mathrm{sen}(4 + i2)$ (e) $\cos(e^{1+3i})$ (f) $\mathrm{tg}(i)$

$\frac{e^z - e^{-z}}{2} \longrightarrow$ (g) $\mathrm{sh}(\frac{1}{1-i})$ (h) $\mathrm{Log}(1-i)$ ✓ (i) $(-i)^{2i}$ ✓ (sólo el valor principal)

26. Verificar que:

(a) $\exp(0) = 1$ (b) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$ ✓ (c) $\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$ ✓ (d) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ ✓

27. Demostrar que:

(a) $\exp(i\bar{z}) \neq \overline{\exp(iz)}$, a menos que $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ✓

(b) $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ para todos los valores de z. ✓

(c) $\mathrm{sen}(i\bar{z}) \neq \overline{\mathrm{sen}(iz)}$, a menos que $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. ×

28. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $\exp z = 1$ ✓ (b) $\cos z = 0$ ✓ (c) $\cos z = 10$ ✓

~ (d) $\mathrm{sen}\, z = 0$ — (e) $\mathrm{sen}\, z - a = 0$ $(|a| \leqslant 1)$ (f) $\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}$

— (g) $\mathrm{sh}\, z = 2i$ (h) $\mathrm{Log}\, z = i\frac{\pi}{2}$ (i) $\mathrm{sh}(2z - 1) = 2i$

— (j) $(\exp z - 1)^3 = 1$ — (k) $\cos(\frac{1}{z}) + 1 = 0$ — (l) $(\mathrm{Log} z)^2 + \mathrm{Log} z = -1$

29. Para las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \exp z$ ✓ (ii) $f(z) = \mathrm{sen}\, z$ (iii) $f(z) = \cos z$ (iv) $f(z) = \mathrm{sh}\, z$] todas enteras

(v) $f(z) = \mathrm{ch}\, z$ (vi) $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$ ✓ (vii) $f(z) = \mathrm{Log}\, z$ ✓

(a) Obtener $\mathrm{Re}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Indicar dominio e imagen. Hallar sus ceros. Estudiar periodicidad.

30. (a) Demostrar que $f(z) = \exp(iz)$ está acotada en el semiplano superior (es decir, probar que $\exists\, M > 0 / |f(z)| < M$, $\forall\, z$: $\mathrm{Im}(z) > 0$). ¿Qué puede afirmar al respecto de $f(z) = \exp(-iz)$? ✓

(b) Investigar si $\mathrm{sen} z$ y $\cos z$ están, o no, acotadas en el semiplano superior y en el inferior. ✓

$\frac{1}{3!}$ +

$iz = i(x+iy) = ix - y$

$-iz = -ix + y$

ii) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ es compos de func dif ⊗
⇒ es dif salvo donde se anula el denom.

Veamos CR°

$$\frac{e^{-y}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - e^{y}(-\cos(x) - i\operatorname{sen}(x))}{2i}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y}(-i)(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y} i(-\cos x - i\operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y} e^{i(\pi/2 + 2k\pi)} (\cos x + i\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y} e^{i\pi/2 + 2k\pi} (-\cos x - i\operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y}\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{0} + i\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{1,\ \text{lógico}}\Big] (\cos x + i\operatorname{sen} x) + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y}(i\cos x - \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y}(-i\cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(i\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\operatorname{sen} z) = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(-\operatorname{sen} x) \\ \operatorname{Im}(\operatorname{sen} z) = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(\cos x) \end{cases}$$ ⊗

$$u_x = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) \cos x = -\frac{1}{2}(-e^{-y} + e^{y}) \cos(x)$$

$\left.\begin{array}{l}\text{[ceros de } \operatorname{sen}(z)] = k\pi \\ \text{ceros del coseno} = k + \frac{\pi}{2}\end{array}\right\rangle k \in \mathbb{Z}$

- $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi \;, r > 0$

$\theta = \operatorname{Arg} z$

$\left.\begin{cases} \operatorname{Re} f = \ln r = u(x,y) \\ \operatorname{Im} f = \theta = v(x,y) = \operatorname{Arg} z \end{cases}\right] \rightarrow$ funciones diferenc.

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta = \frac{1}{r}$ ✓

$-v_r = 0 = \frac{1}{r} \cdot 0 = \frac{1}{r} \cdot u_\theta$ ✓

cumplen CR $\forall \mathbb{R}^2$

$\downarrow$

$\boxed{\text{F es holomorfa en } \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / z = x + i0, x \leq 0\}}$

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

$\operatorname{Img} f = \mathbb{C}$

$\operatorname{Log} z = 0$

$\ln r + i\theta = 0$

$\hookrightarrow \theta = 0$

$\ln r = 0 \rightarrow \boxed{r = 1}$

} 1 es ~~el~~ cero de $\operatorname{Log}(z)$

- $f(z) = \operatorname{Arg} z$

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

$\operatorname{Img} f = \mathbb{R} \in (-\pi, \pi]$

$\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Arg} z$

$\operatorname{Im}(f) = 0$

F es holomorfa en $\mathbb{C} - \begin{cases} z = x + i y \\ x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Arg} z = 0 \iff \boxed{z = x + 0i \;, x > 0}$

30 a) $f(z) = \exp(iz)$

$$|f(z)| = |e^{iz}| = |e^{-y} e^{ix}| = \underbrace{e^{-y}}_{} \geq 0$$ por ser un módulo

$D = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ —— $y \geq 0$

$e^{-y} \leq e^{0}$

$-1 \leq f(z) \leq 1$ ← $e^{-y} \leq 1$

en D

$f(z) = \exp(-iz) \Rightarrow |f(z)| = e^{y}$

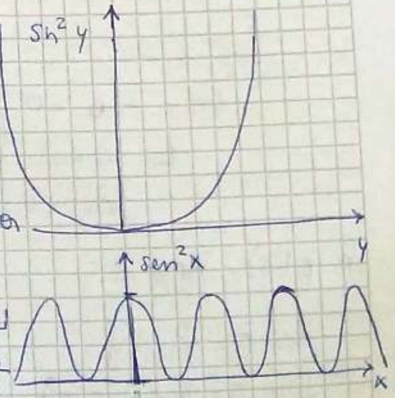
↳ no está acotado, puede llegar hasta ∞

b) $|\operatorname{sen} z|^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\text{acotado } \forall x} + \underbrace{\operatorname{sh}^2 y}_{}$

no está acotado en el semiplano sup ni el inferior ($y \leq 0$ e $y \geq 0$)

no está acotado

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$



31

ⓐ $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$

s = sen(x)
c = cos(x)
sh = senh(y)
ch = cosh y

$(\operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x)^2$

$+ (\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)^2$

$= s^2 ch^2 + (i\, sh\, c)^2 + \cancel{2 \cdot s \cdot ch\, c \cdot sh\, i}$

$+ c^2 ch^2 + (-i\, s\, sh)^2 - \cancel{2\, c\, ch\, s\, sh\, i}$

$= ch^2 - sh^2 c^2 - s^2 sh^2 = ch^2 - sh^2 (s^2 + c^2) = -sh^2 + ch^2 = 1$

ⓑ $|\operatorname{sh} z|^2 = |\operatorname{sh}(x) c(y) + i \operatorname{ch}(x) s(y)|^2$

$= \operatorname{sh}(x)^2 c(y)^2 + \operatorname{ch}(x)^2 s(y)^2$ → no llego a donde busco

$|\operatorname{Sh}(z)|^2 = |-i \operatorname{sen}(iz)|^2 = |\operatorname{sen}(-y + ix)|^2$ ok, ¿cómo hago ahora?

$|\operatorname{sen} z|^2 = |s\; x\, ch\, y + i\, c\, x\, sh\, y|^2$

$= s^2 ch^2 + c^2 sh^2 = ch(y)^2 + sh(y)^2$ eh, no, tampoco.

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \left| \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \right|^2 = \left| \frac{e^{x} e^{iy} - e^{-x} e^{-oy}}{2} \right|^2$$

$$= \frac{|e^{x}(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)) - e^{-x}(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))|^2}{4}$$

$$= \frac{|e^{x} \cos(y) + e^{x} i \operatorname{sen}(y) - e^{-x} \cos y + i \operatorname{sen} y\, e^{-x}|^2}{4}$$

$$= \frac{|(e^{x} - e^{-x}) \cos y + i (e^{x} + e^{-x}) \operatorname{sen} y|^2}{4} = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4}$$

$\frac{1}{3!}$ +

$Sh^2(x) + Sen^2(y)$

$$= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{e^{2x}}{4} - \frac{2e^{x}\cdot e^{-x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4}} + \frac{e^{i2y}}{(2i)^2} - \frac{2e^{iy}e^{-iy}}{(2i)^2} + \frac{e^{-2iy}}{(2i)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{e^{i2y}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2iy}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4} - \frac{(\cos(2y)+i\,sen(2y))}{4}$$
$$- (\cos(-2y)+i\,sen(-2y))$$

no ver

$$= \frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{\cos(2y)}{2}$$

$$\frac{(2\,senh^2(x)+1)}{2} \left[\begin{matrix} -\cos(2y) - i\,sen(2y) \\ -\cos(-2y) - i\,sen(-2y) \end{matrix}\right] \frac{1}{4}$$

$$= senh^2(x) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(2y)}{2}$$

$$= senh^2(x) + sen^2(y) \qquad \boxed{Loop}$$

③④

a) $f(z) = tg(z) = \dfrac{sen(z)}{\cos(z)} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{i(e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y})}$$

$$= \frac{(\cos(x)+i\,sen(x))e^{-y} - (\cos(-x)+i\,sen(-x))e^{y}}{(\cos(x)+i\,sen(x))e^{-y} + (\cos(-x)+i\,sen(-x))e^{y}} \frac{1}{i}$$

$$= \frac{(e^{-y}-e^{y})\cos(x) + i\,sen(x)(e^{-y}+e^{y})}{(e^{-y}+e^{y})\cos(x) + i\,sen(x)(e^{-y}+e^{y})}$$

q no sirve de mucho.

- $tg(z)$ es composición de funciones holomorfas
  $\Rightarrow$ es holomorfa salvo donde se anula el denominador, o sea los $z = \frac{\pi}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$
- $tg(z)$ es continua por ser compos. de func continuas salvo donde se anula el denominador.

Pregunta: ¿$\overline{f(z)}$ es holomorfa?

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - i\,v(x,y)$$
$$u_x(x,y) = -v_y(x,y) \ne$$
$$u_y(x,y) = v_x(x,y)$$

$\frac{1}{3!}$ +

$$\overline{\operatorname{sen}(z)} = \overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{\overline{2i}}$$

$$= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i} = \frac{-\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{(-)2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$= \operatorname{sen} z$

(f) va a ser ~~entera~~ holomorfa

en $\mathbb{C} - \left\{ (x,y) \,/\, x^2+y^2 = 0 \right\}$

(c) se hizo en clase.

35) $\log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$(1+i)^{3+4i} = e^{\log(1+i)(3+4i)} = e^{\left(\ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)(3+4i)}$$

$$= e^{\left[3\ln(\sqrt{2}) - \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] + i\left[3\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) + 4\ln(\sqrt{2})\right]}$$

㊷ $\left\{ z = iy \,/\, ax + by = c \right\}$ $y =$

$\underline{x = ck}$ $\quad z = ki, \quad k \in \mathbb{R}$

$\underline{y = cte}$

$$f(z) = \frac{1 + 3(x+iy)}{2 + x + iy} =$$

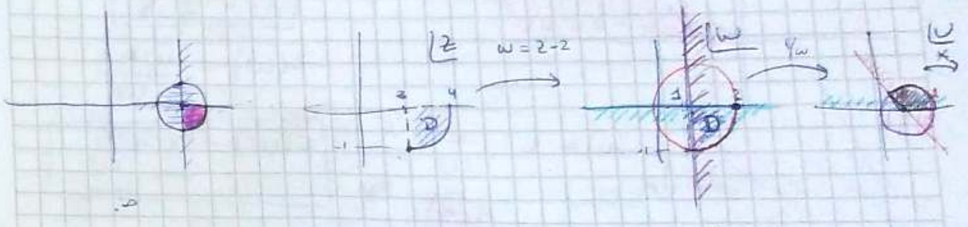
$$f(z) = f(ki) = \frac{1+3ki}{2+ki} = \frac{1+3ki}{2+ki} \cdot \frac{2-ki}{2-ki} = \frac{2 - ki + 6ki + 3k^2}{4+k^2}$$

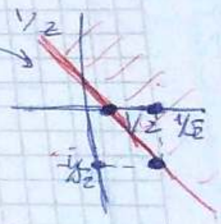
$$f(z) = \frac{2+3k^2}{4+k^2} + \frac{\overset{5k}{5ki}}{4+k^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

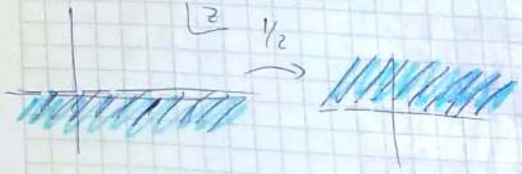
→ mθ,
country ball

43) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1,\ \operatorname{Re}(z) \geq 3,\ \operatorname{Im}(z) < 0 \right\}$

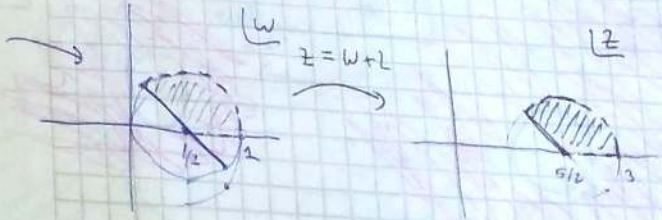
$\frac{1}{3!} +$







$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$



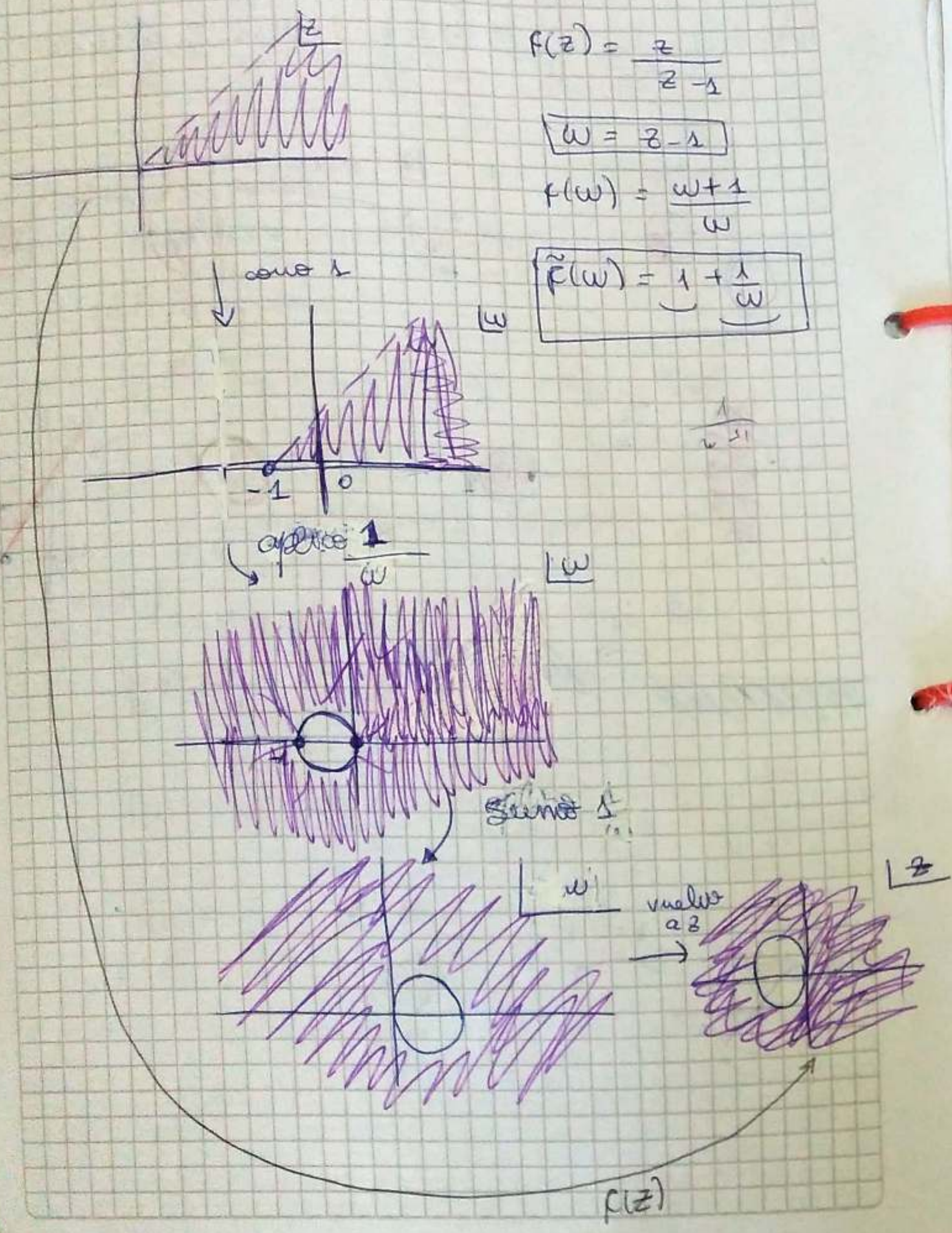
b) $D = \{ z \in C \quad 0 < \text{Arg } z < \pi/4 \}$

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\boxed{\omega = z - 1}$$

$$f(\omega) = \frac{\omega + 1}{\omega}$$

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{\omega}}}$$

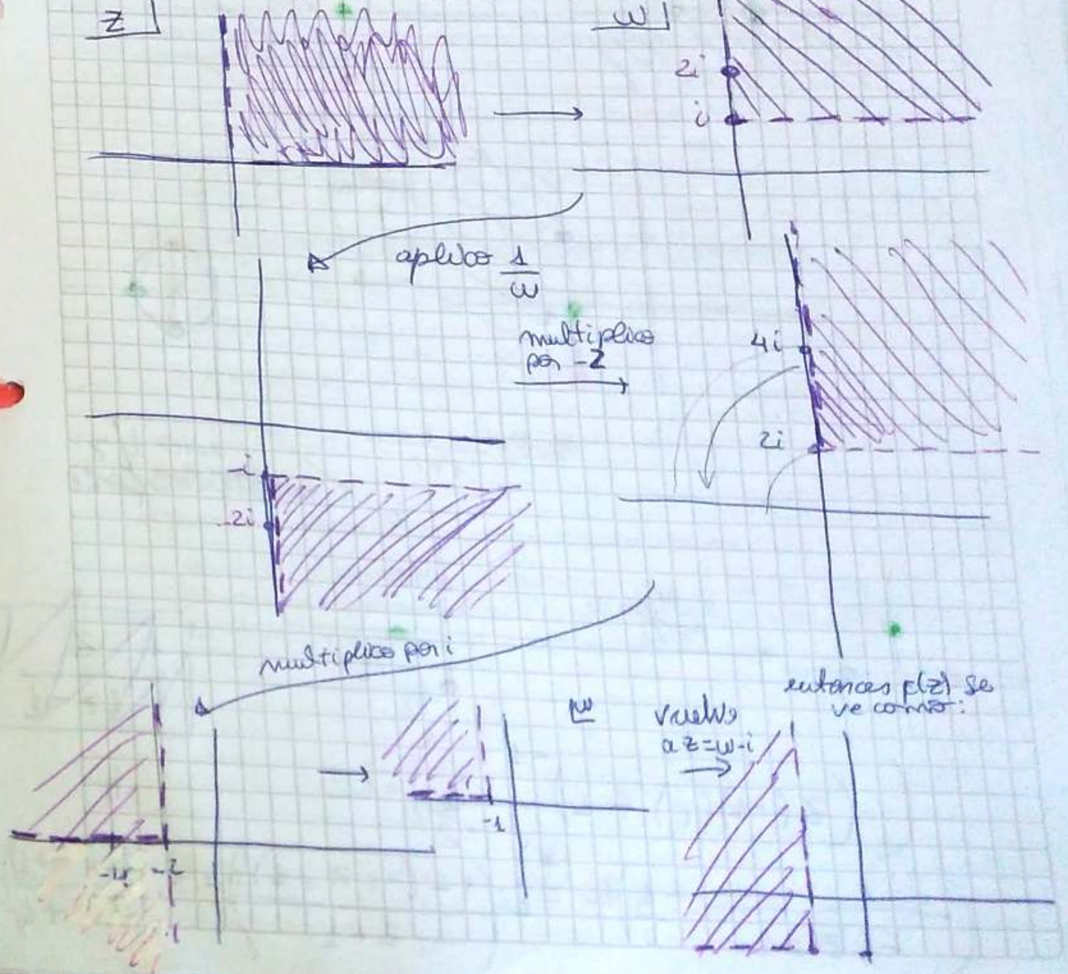


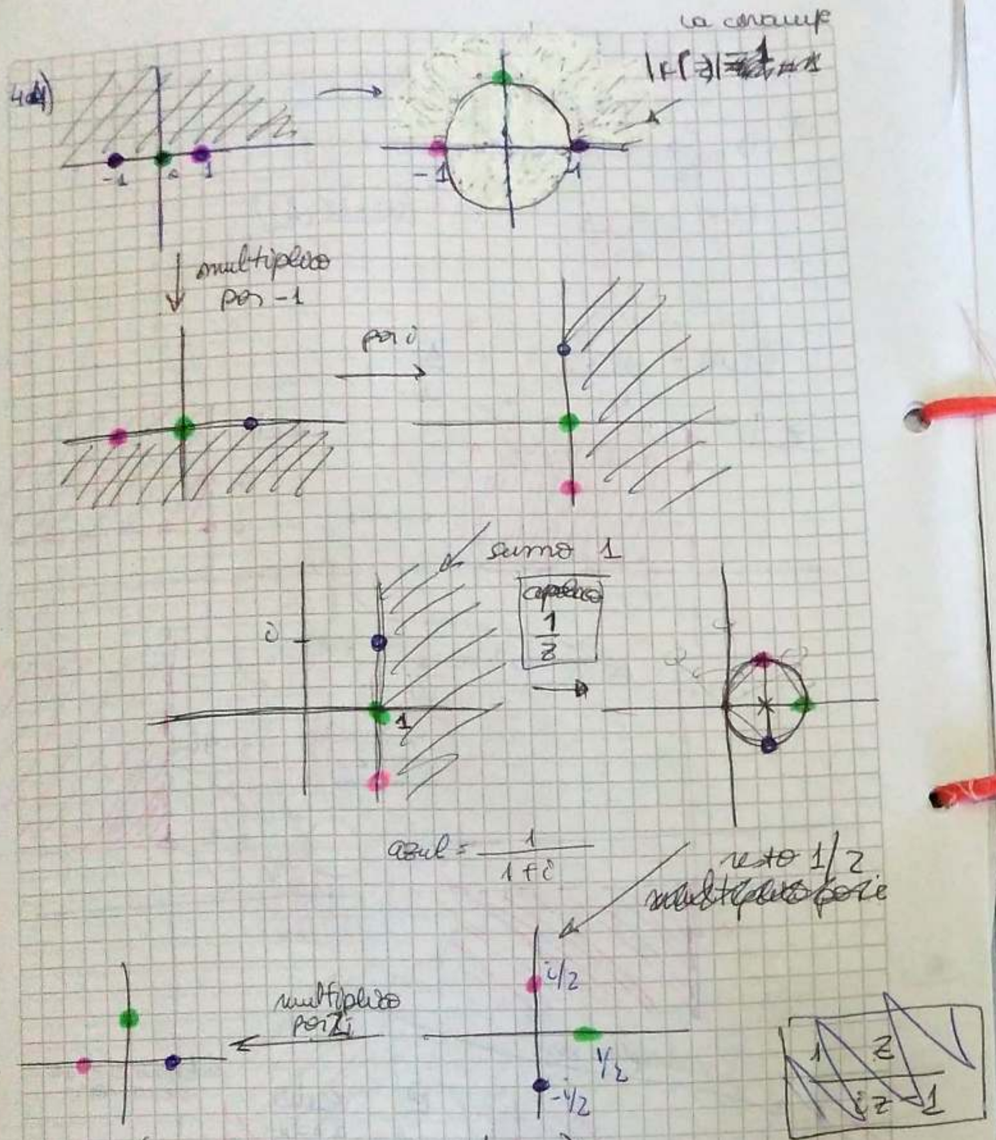
c) $D = \{ z \in \mathbb{C} / \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0 \}$

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i} \qquad \boxed{\omega = z + i}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\omega - 2i}{\omega} = 1 - \frac{2i}{\omega}$$





$$\left(\left(z(-1)(i)+1\right)^{-1}-\frac{1}{2}\right)\cdot i2$$

$$\left(\frac{1}{-iz+1}-\frac{1}{2}\right)2i \overset{(*)}{=} i2\left(\frac{1-(-iz+1)\frac{1}{2}}{-iz+1}\right)=2i\left(\frac{\frac{1}{2}(iz+1)}{-iz+1}\right)$$

39.) (a) Sea $F(z)$ una rama del logaritmo cuyo corte es la semirrecta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$. Hallar: $F(1)$, $F(-ie)$, $F(-e+ie)$, $F(-\sqrt{3}+i)$ y $F(e^{3i\pi/4})$.

(b) Sea $G(z)=1+z^{\frac{1}{3}}$. Se considera la determinación de la $z^{\frac{1}{3}}$ definida para $z \neq iy$ con $y \geqslant 0$ cuyo valor en 1 es 1. Calcular $G(-1)$ y $G(-i)$.

(c) Sea $H(z)=z+\log(z-3)$. Si se considera la determinación del $\log z$ definida en $\mathbb{C}-\{z=iy\ ,\ y\geqslant 0\}$, cuyo valor en $z=1$ es 0, calcular el valor de $H(5)$, $H(2)$ y $H(3-i)$.

40.) (a) Determinar una rama de $z^{\frac{1}{2}}$ tal que restringida a los reales positivos coincida con la raíz cuadrada y $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$. ¿Es única?

(b) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es continua en su dominio con valores: $\sqrt[3]{-1}=-1$ y $\sqrt[3]{1}=1$. ¿Cómo se relaciona esta función con la multivaluada raíz cúbica compleja?

41.) Sean: (a) $w=\mathrm{arcsen}\, z$ (b) $w=\arccos z$ (c) $w=\mathrm{argsh}\, z$ (d) $w=\mathrm{argch}\, z$, las relaciones inversas de las funciones $\mathrm{sen}\, z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$ y $\cos z$ respectivamente. Explicar por qué son multivaluadas y obtener la expresión de cada una de ellas en forma logarítmica. → leer

Transformaciones del Plano Complejo

42.) ¿En qué se transforman las rectas x=cte e y=cte bajo la aplicación $f(z) = \dfrac{1+3z}{2+z}$?

43.) Transformar la región D del plano complejo mediante las funciones indicadas:

(a) $D=\{z\in\mathbb{C} : |z-3|\leqslant 1\ ,\ \mathrm{Re}\, z>3\ ,\ \mathrm{Im}\, z<0\}$ $\qquad f(z)=\dfrac{1}{z-2}$

(b) $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\mathrm{Arg}\, z<\frac{\pi}{4}\}$ $\qquad f(z)=\dfrac{z}{z-1}$

(c) $D=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z>0\ ,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ $\qquad f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

(d) $D=\{z\in\mathbb{C} : |z-2|<2\ \wedge\ |z-1|>1\ ,\ \mathrm{Re}\, z<1\ ,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ $\qquad f(z)=\dfrac{1}{z}$ ✗

(e) $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\ ,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ $\qquad f(z)=1+\dfrac{1}{z}$ ✗

44.) Encontrar la transformación homográfica que transforma los puntos:

(a) $-1,\ 0,\ 1$ en los puntos $1,\ i,\ -1$ respectivamente.

(b) $-1,\ i,\ 1+i$ en los puntos $i,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

(c) $-1,\ \infty,\ i$ en los puntos $0,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

} no le iban a dar atención.

$\frac{i}{1}$ $\qquad$ $\frac{1}{3!}+$

$$\boxed{\begin{matrix} b=i & \\ c=-i & a\neq 0 \\ d=1 & \end{matrix}}$$

$$(1-iz)(1+iz)=1-iz+iz+iz(-iz)$$
$$1+z^2$$

$\frac{1}{3!}+$

$$\textcircled{*}\left(\frac{1}{-iz+1}-0{,}5\right)i2=\left(\frac{1-0{,}5(-iz+1)}{-iz+1}\right)i2$$

$$=\left(\frac{0{,}5\,iz+0{,}5}{-iz+1}\right)2i=\boxed{0{,}5\,\frac{(iz+1)}{-iz+1}2i}=-i\frac{(iz+1)}{(iz-1)}\Big\}\frac{z-i}{iz-1}$$

$$=0{,}5\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)2i=0{,}5\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\cdot\frac{1+iz}{(1+iz)}\cdot i$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(1+iz)^2\,i}{1+z^2}$$

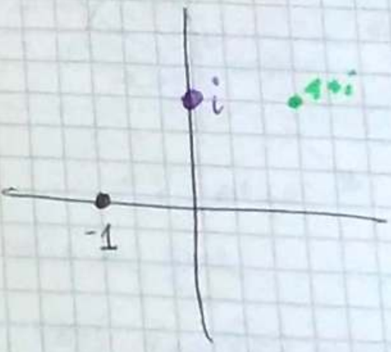
~~prueba de que las mujeres son complicadas. (más~~

equiv

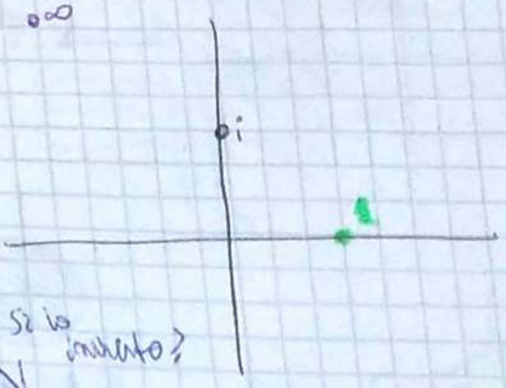
$$\downarrow$$

$$=\frac{i-z}{1-iz}$$

b)



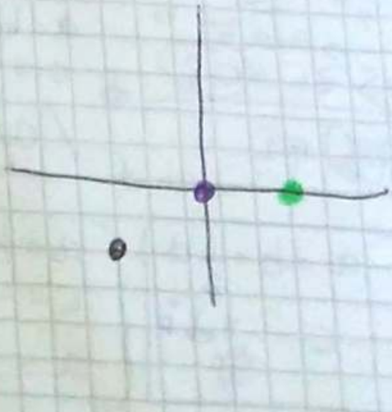
que pase a

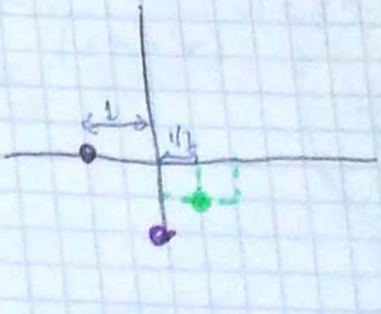


lo hago a parte

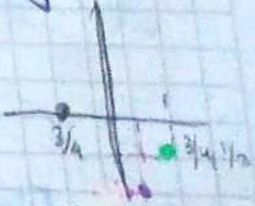
1 si lo invierto?

resto i





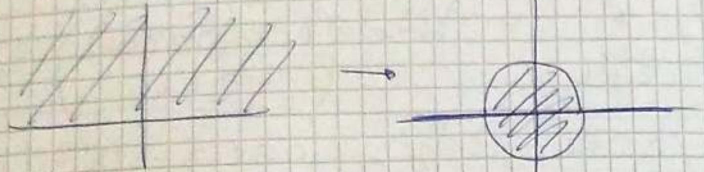
le sumo 1/4



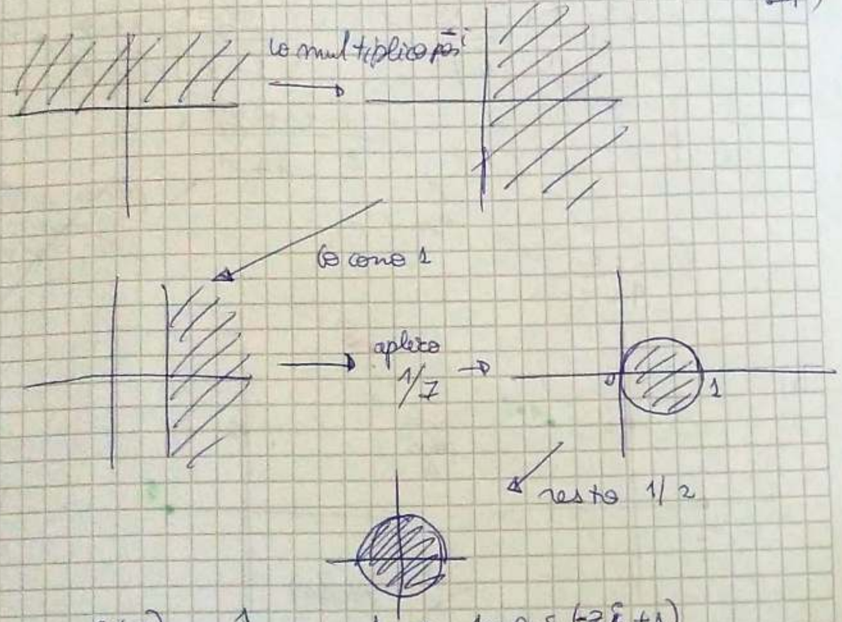
lo multiplico por i

A parte mide que no existe.

45)



Busco 1 que cumple (~~y como cumple para infinitos puntos debe ser~~)



$$f(z)=\frac{1}{(-zi+1)}-\frac{1}{2}=\frac{1-0,5(-zi+1)}{-zi+1}$$

$$=\frac{\overset{\text{una } a}{0,5}\,zi+\overset{\text{una } b}{0,5}}{\underset{\text{una } c}{-zi}+\underset{\text{una } d}{1}}\Rightarrow \begin{array}{l}a=b\\ c=-d\\ /\ a/d=\frac{1}{2}\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}a=b=\frac{1}{2}d\\ c=-d\,i\end{array}}\quad\left\{\begin{array}{l}a=b\\ c=-d\\ a=\frac{1}{2}d\end{array}\right.$$

$$f(z)=\frac{0,5dzi+0,5d}{-d(iz)+d}$$

$/ d\in\mathbb{R},\ z\in \operatorname{Im}(z)>0$

Una transformación es conforme en z_0 si es holomorfa en z_0 y $f'(z_0)\neq 0$

$\frac{1}{3!}$ +

Sea $z_1(t)$ una curva en $\mathbb{C}$:

$f(z(t))=w(t)$ que es la imagen de esta curva.
$/\ z_1(t_0)=z_0$ con $z_1(t)=x(t)+i(y(t))$

La velocidad de $w(t)$ en z_0 es

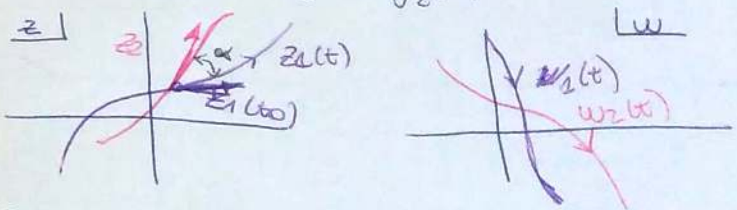
$$w'(t_0)=f'(z_0)\circ z_1'(t_0)$$

y además:

$$\arg(w'(t_0))=\arg(f'(z_0))+\arg(z'(t_0))$$

Sea otra curva:

$z_2(t)\ /\ z_2(t)=x_2(t)\ i\ y_2(t)$



ocurre que

$$\arg z_2'(t_0)-\arg z_1'(t_0)=\alpha$$
$$=\arg w_2'(t_0)-\arg w_1'(t_0)$$

Por último, pero no por eso menos importante, se pudo comprobar que los conocimientos adquiridos en la materia junto a la diversidad de conocimientos y aptitudes que aporta el trabajo en equipo, son suficientes para poder implementar enlaces satelitales y terrestres que resuelvan situaciones problemáticas reales.

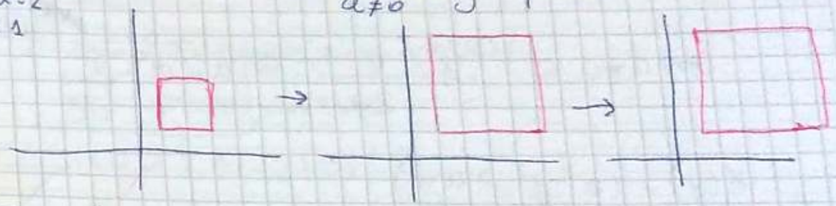
---

47) $f(z) = \underbrace{az}_{\text{escala}} + \underbrace{b}_{\text{traslación}}$ f holomorfa ∀ z ∈ ℂ

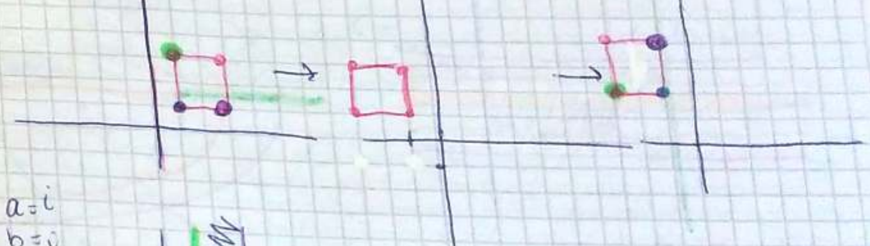
o escala + rot. — por ser compos. de func enteras.

$f'(z) = a$, $\Rightarrow f'(z) \neq 0$ si $a \neq 0$ } será conforme ∀ punto

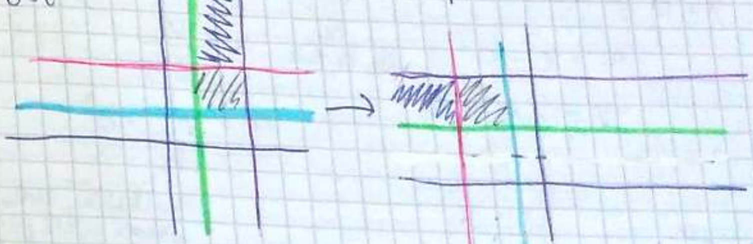
si a = 2
b = 1



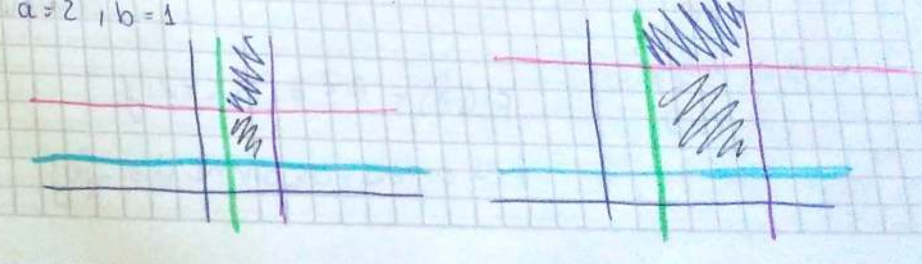
si a = i
b = i



a = i
b = i



a = 2 , b = 1



$\frac{1}{3!}$ +

$\operatorname{Im}(f(z)) = v$

$f(z) = z^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{} + \overbrace{2xy}^{} i$ F es entera

$z = (x+yi)$ $\operatorname{Re}(f(z)) = u$

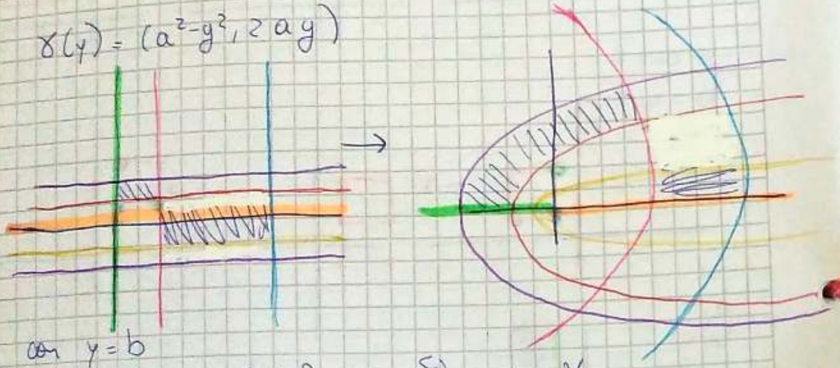
Si $x = a = cte$

↳ $u = a^2 - y^2$, $v = 2ay$, $y \in \mathbb{R}$

con $a \neq 0 \Rightarrow$ $y = \frac{v}{2a}$ $\Rightarrow \boxed{u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}}$

forma de parabola

$\gamma(y) = (a^2 - y^2, 2ay)$



con $y = b$

$u = x^2 - b^2$ $\Rightarrow$ Si $b \neq 0$ $x = \frac{v}{2b}$

$v = 2xb$

$u = \frac{v^2}{4b} - b^2$

también una parábola pero mirando para el otro lado

$y = 0 \Rightarrow u = x^2$

$v = 0$

$x = 0 \Rightarrow u = -y^2$

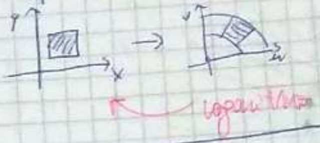
$v = 0$

$f'(z) = 2z = 2x + 2iy$

f es entera y conforme $\forall z - \{0\}$

$\frac{1}{3!}$ +

La transf exponencial:



S1-a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Im}(z)\}$

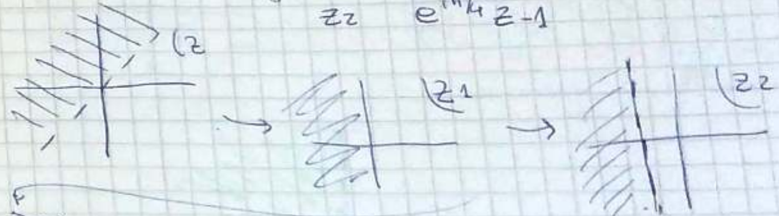
↳ círculo unitario

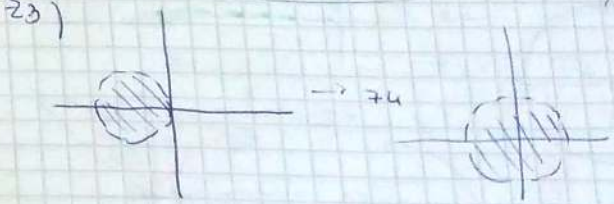
$T(D) = \{z / |z| < 1\}$

$z_1 = e^{i\pi/4} z \rightarrow z_2 = z_1 - 1 = e^{i\pi/4} z - 1$

↓

$z_3 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{e^{i\pi/4} z - 1} \rightarrow z_4 = z_3 + 1/2$





$W = 2z_4$

$W = 2(z_3 + 1/2)$

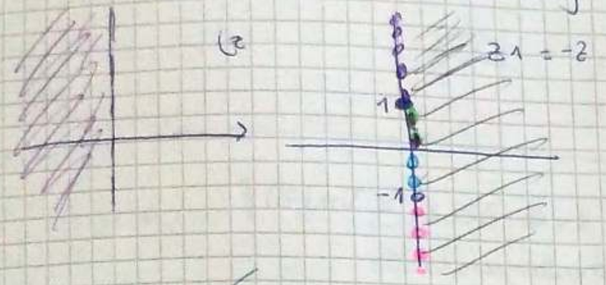
$W = 2\left(\frac{1}{z e^{\frac{i\pi}{4} - 1}} + \frac{1}{2}\right)$

$T(z) = 2\left(\frac{1}{z e^{i\pi/4} - 1} + \frac{1}{2}\right)$

$\tilde{T}(z) = e^{i\theta_0} T(z)$

51-b) $D = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0 \}$

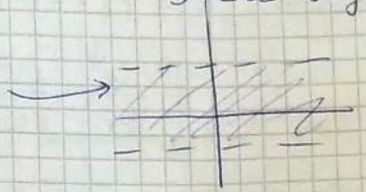
$T(D) = \{ z \in \mathbb{C} / -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$



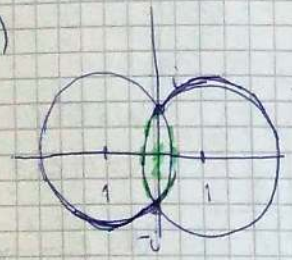
$z_1 = -z$

$z_2 = \operatorname{Log}(z_1) = \operatorname{Log} -z$

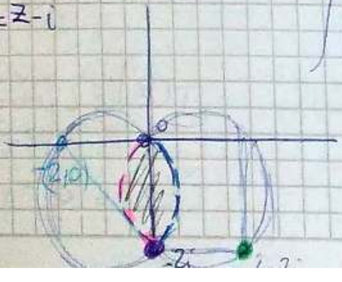
$z_3 = 2z_2 = 2\operatorname{Log}(-z)$



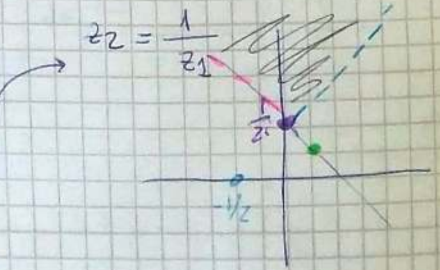
d)



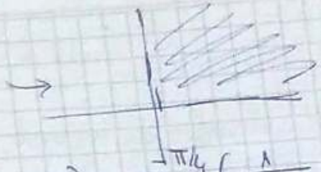
$z_1 = z - i$



$z_2 = \frac{1}{z_1}$



Rot(0, −π/4)

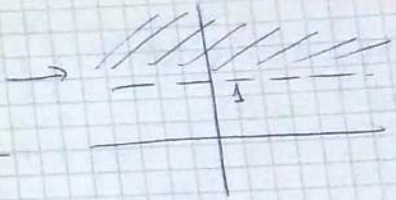


$T(z) = e^{-\pi/4}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}i\right)$

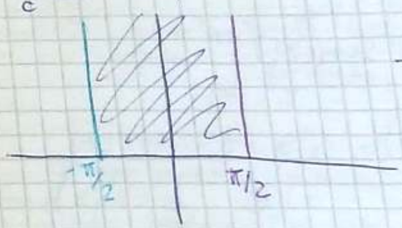
$\frac{1}{3!} +$

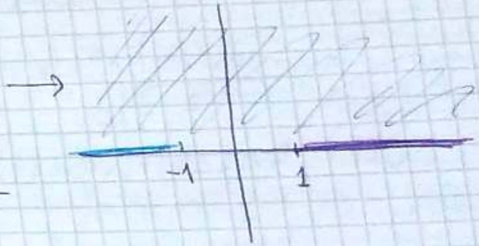
=

e)



¿sen(z)?

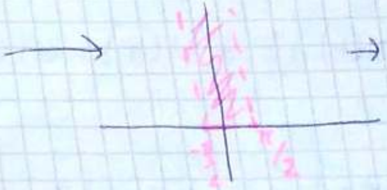




Volviendo

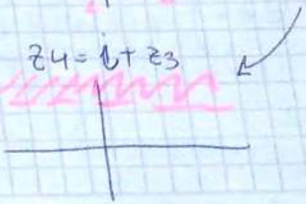
$z_1 = z - 1$

$z_2 = z_1 \cdot \pi/2$



$z_3 = \operatorname{sen}(z_2)$

$z_4 = i + z_3$



$w = i + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right)$

ocw.mit.edu curso 18 013 A

TOOLS

↓

complex functions

curvas de nivel

de $u(x,y)$ $v(x,y)$

Integración 13/04/18

1 a $\int_0^1 \underbrace{1+it^2}_{w(t)} dt = \int_0^1 1 dt + i\int_0^1 t^2 dt$

$= 1 + i\frac{1}{3}$

c) $\int_0^\pi \text{sen}(2t)+i\cos(2t)\, dt = \int_0^\pi \text{sen}(2t)dt + i\int_0^\pi \cos(2t)dt$

$= -\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^\pi + i\frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big|_0^\pi = 0$

$w(t) = \text{sen}(2t)+i\cos(2t) = i(\cos 2t - i\,\text{sen}\, 2t)$

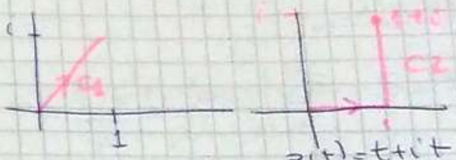
$= ie^{-2ti} = U'(t)$

$\Rightarrow U(t) = \frac{ie^{-2ti}}{-2i} = -\frac{1}{2}e^{-2ti}$

$\int_0^\pi w(t)dt = U(\pi) - U(0) = -\frac{1}{2}e^{-2\pi i} + \frac{1}{2}e^{0i} = 0$

$\int_C f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(z(t)) \cdot z'(t)}_{w(t)} dt$ $\quad C: z(t),\ t\in[a,b]$

2 a) $\int_{C_k} \text{Re}\, z = dz$ $\quad k = 1, 2)$



$f(z(t)) = \text{Re}(z(t)) = t$

$\frac{1}{3!}+$

$f(z) = \text{Re}\, z$ $\quad C_1: x = y$ $\quad z(t) = t+it$

$z'(t) = 1+i$

$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 t(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = \boxed{\frac{1+i}{2}}$

C_2: $z_1(t) = t+0i$ $\quad t\in[0 1]$

$z_1'(t) = 1$ $\quad f(z_1(t)) = \text{Re}(t+0i) = t$

$z_2(t) = 1+ti$ $\quad t\in[0,1]$

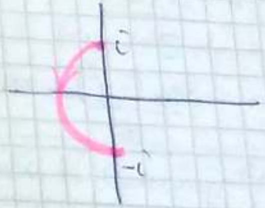
$z_2'(t) = i$ $\quad f(z_2(t)) = \text{Re}(1+ti) = 1$

Como por 2 caminos no da lo mismo no es holomorfa

Si la integral no dep del camino tiene primitiva.

Si $\int_C z^3 dz$ / C: semicircunf desde $z=i$ a $z=-i$

con $\text{Re}(z)<0$



$z(t) = e^{it}$ $\quad t\in[\pi/2, \frac{3}{2}\pi]$

$z'(t) = ie^{it}$

$f(z(t)) = z(t)^3 = e^{i3t}$

$\int_C z^3 dz = \int e^{i3t} \cdot ie^{it} dt = i\int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} e^{i4t} dt = i\frac{e^{i4t}}{4i}\Big|_{\pi/2}^{3/2\pi} \rightarrow$

$$= \frac{1}{4} e^{i6\pi} - \frac{1}{4} e^{i2\pi} = 0$$

otra forma

$$\int_C z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_i^{-i} = \frac{(-i)^4}{4} - \frac{(i)^4}{4} = 0$$

Si $\int_C \frac{1}{z^4} dz = 0$

C: circunf centro (0,0) radio R

$f(z) = \frac{1}{z^4}$ tiene primitiva ya que $F'(z) = \frac{1}{z^4}$

con $F(z) = -\frac{1}{3} \frac{1}{z^3}$, C cerrada

$$\int_C z \,\text{sen}(z^2) dz = I$$

(4)c) C: contorno que une los puntos $-i\pi$ con $i\pi$

$$f(z) = z\,\text{sen}(z^2) = F'(z)$$

$$F(z) = \frac{-\cos(z^2)}{2}$$

$$I = F(i\pi) - F(-i\pi) = -\frac{\cos(-\pi^2)}{2} + \cos\frac{(-\pi)}{2} = 0$$

3) $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \frac{e^{i(m-n)\theta}}{i(m-n)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\downarrow$ $m \neq n$

Si $m = n$ $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$

$\frac{1}{3!} +$

$\int_C z^m \bar{z}^n dz$, γ: circunf centro origen radio r

$z(t) = re^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$z'(t) = ri e^{i\theta}$ $f(z(\theta)) = z(\theta)^m \bar{z}(\theta)^n$

$$= re^{i\theta} \cdot (\overline{re^{i\theta}})^n$$

$$= r^{(m+n)} e^{i(m-n)\theta}$$

$$\int_C z^m \cdot \bar{z}^m dz = \int_C (r^{m+n+1}) i e^{i(m-n+1)\theta} d\theta$$

$$= r^{m+n+1} i \int_C e^{i(m-n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m-n+1 \neq 0 \\ r^{m+n+1} i 2\pi & m-n+1 \neq 0 \end{cases}$$

Vimos f tiene primitiva $\Rightarrow \int_C f dz = 0$ si C es cerrada

Veremos, si f es holomorfa en C y en el interior de C, C cerrada $\Rightarrow \int_C f dz = 0$

$\boxed{\text{Teorema de Cauchy-Goursat}}$

Sea $f \in H(D)$, D dominio (D abierto conexo) y sea C, contorno cerrado simple contenido en D / f es holomorfa en C y el int C, f' continua en C y RI(C) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

Recordemos teo de Green F = (P,Q) un campo de $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, F es C^1 en una curva cerrada simple C y en su interior, $C \cup RI(C) \subset D$

Dem: $\int_C F(x,y)\,dl$

$$= \iint_{RI(C)} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

Ahora $\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy)$

$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy = \int_C (u,-v)\,dl + i\int_C (v,u)\,dl$$

Los campos (u,-v) y (v,u) satisfacen hipótesis de Teo de Green, luego

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_{RI(C)} (-v'_x - u'_y)\,dx\,dy + i\iint_{RI(C)} (u'_x - v'_y)\,dx\,dy$$

u, v satisfacen C-R: $u'_x = v'_y$; $u'_y = -v'_x$

Luego $\int_C f(z)\,dz = 0$

Cauchy lo demostró con estas hipótesis
Goursat demuestra sin hipótesis de f' continua.

$\frac{1}{3!}$ +

Extensión 1

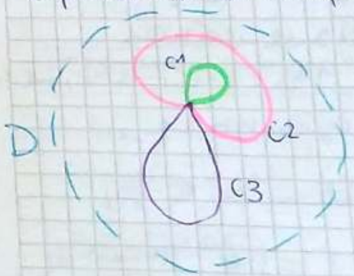
Sea D un dominio simplem. conexo, $f \in H(D)$, C contorno cerrado simple en D.

$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

(Al ser D simplemente conexo, nos aseguramos que $RI(C) \subset D \Rightarrow$ f es holomorfa en RI(C))

Extensión 2

Si D es dominio s.c. y C un contorno cerrado (posiblem. no simple) en D $\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$



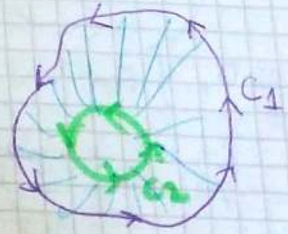
$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

C_1, C_2, C_3 son simples

$$\int f(z)\,dz = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f + \int_{C_3} = 0$$

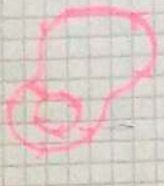
Extensión 3

Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples / $C_2 \subset RI(C_1)$ y sea f una función holomorfa en C_1, C_2 y $RE(C_2) \cap RI(C_1)$



Y consideremos C_1 y C_2 orientados ⊕

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



$C = C_1 \cup L \cup C_2^- \cup L^-$

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_L + \int_{C_2^-} + \int_{L^-}$$

$$\int_C F = \int_{C_1} F - \int_{C_2} F = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_1} F = \int_{C_2} F}$$

Resultado tmb conocido como Invarianza homotópica o ppio de deformación de camino.

Ej: $f(z) = \frac{e^z}{z}$ C: cuadrado de vértices $1+i, 1-i, -1-i, -1+i$, orientado +.

F es holom en $\mathbb{C} - \{0\}$

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz = \int_{C_2} \frac{e^z}{z}$$ siendo C_2 circunf de radio $r < 1$ orientada ⊕

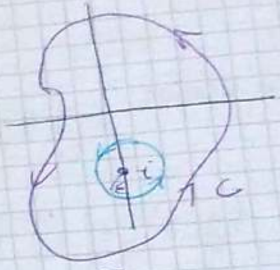
Corolario Si f es holomorfa en un dominio S.C.
⇒ tiene primitiva allí.

¿Por qué?
Para cualquier curva cerrada en D, $\int_C F = 0$
Por teo. de la clase que falté

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

$\frac{1}{3!}$ +

Ej: $\int_C \frac{1}{z+i} dz$ $\frac{1}{z+i}$ es holom en $\mathbb{C} - \{-i\}$



Por invarianza homotópica

$$\int_C \frac{1}{z+i} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z+i} dz$$

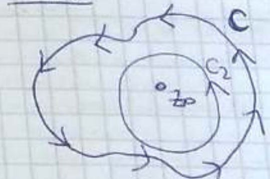
C_2: $z(t) = -i + \varepsilon e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$
$z'(t) = i\varepsilon e^{it}$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z+i} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} = \boxed{2\pi i}$$

Teorema integral de Cauchy

Sea f holomorfa en $C \cup RI(C)$, C contorno cerrado simple, y sea $z_0 \in RI(C)$ ⇒ $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$
↓
orientado ⊕

Dem:



Sea C_2: circ centro z_0, radio r, interior a C, orientada ⊕.

Por Int. homot: $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz\, f(z_0) \right|$$

$$= \left| \int_{C2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{C} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| = \left| \int_{C2} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \rightarrow$$

veremos que esto es tan

$\textcircled{*}$ ↓ veremos que esto es tan chico como uno quiere.

Como acoto $\left| \int_C g(z)\,dz \right|$

$$\left| \int_C g(z)dz \right| = \left| \int_a^b g(z(t)) . z'(t)\,dt \right| \leq$$

$$\int_a^b |g(z(t)) . z'(t)|\,dt = \int_a^b |g(z(t))| . |z'(t)|\,dt \leq \text{algo}$$

si $|g(z)| \leq M \ \forall z \in C$

$$\leq \int_a^b M|z'(t)|dt = M\int_a^b |z'(t)|dt = ML$$ L longitud de C

o sea: $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$ con M cota de $|g(z)|$ sobre C, L long de C.

En la demostración

$g(z)$ = cte incremental

f es holom ⇒ f es continua, en part en z_0.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ / $|z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

Trabajo Práctico Nro. 3

Integrales Complejas

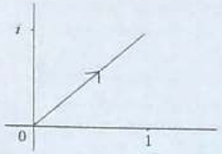
1. Calcular las siguientes integrales:

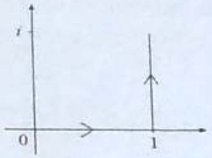
   (a) $\int_0^1 (1+it^2)dt$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi/4} te^{-it^2}dt$

   (c) $\int_0^{\pi} (\text{sen}2t + i\cos 2t)dt$ (d) $\int_1^2 \text{Log}(1+it)dt$

2. Calcular las siguientes integrales de línea:

   (a) $\int_C \text{Re}(z)\,dz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:





   (b) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ C: semicircunf. superior de $|z|=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

   (c) $\int_C (2|z|+3)\,dz$ C: segmento del eje real que une $z_1=-1$ y $z_2=2$.

   (d) $\int_C \pi\, e^{(\pi\bar{z})}\,dz$ C: borde del cuadrado de vértices $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ y $z_4=i$, recorrido en sentido positivo.

3. Mostrar que para $m,n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2\pi & \text{si } m = n \end{cases}$ y obtener el valor de $\int_\gamma z^m \bar{z}^n\,dz$ siendo γ la circunferencia centrada en el origen, de radio r, recorrida en sentido antihorario.

4. Sea la circunferencia $C: z-a = r_0e^{i\theta}$ donde $r_0 > 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, recorrida en sentido positivo. Demostrar que $\int_C f(z)\,dz = ir_0\int_0^{2\pi} f(a+r_0e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$.

$\frac{1}{3!} +$

Tomando $r < \delta \Rightarrow$ sobre C, $|z - z_0| = r < \delta \Rightarrow$

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

sobre C: $|g(z)| = \dfrac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \dfrac{\varepsilon}{r} = M$

Veremos que $$\circledast \leq M\underset{\substack{\uparrow \\ \text{long de } C_z}}{L} = \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi \cdot r = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{es tan chico} \\ \text{como quiera}}}{2\pi\varepsilon}$$

Luego $\left| \int_C \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z) \right| = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z)}$$

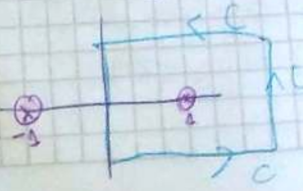
Ej $\int_C \dfrac{e^z}{z} dz$ con C: cuadrado vértices $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$

$f(z) = e^z \rightarrow$ holom en $C \cup RI(C)$

$z_0 = 0 \rightarrow \in RI(C)$

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz \underset{\substack{\downarrow \\ TIC}}{=} 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Ej $\int_C \dfrac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z^2 - 1} dz$ C: cuadrado de vértices i, $-i$, $2+i$, $2-i$



$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z^2-1} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-1} dz \underset{\substack{\text{holom en} \\ C \text{ y } RI(C)}}{=} 2\pi i f(1) = \frac{2\pi i \operatorname{sen}(3+i)}{1+i}$$

$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z+1}$

$z_0 = 1 \in RI(C)$

Teorema integral de Cauchy generalizado

f es holom en C y RI(C), C contorno cerrado simple, $z_0 \in RI(C)$

⇒ f tiene derivadas de todos los órdenes en z_0 y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n=0,1,2\ldots$$

④ $\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+r_0e^{i\theta})\, r_0 i e^{i\theta}\, d\theta$

$z = a + r_0 e^{i\theta}$

$dz = r_0 i e^{i\theta}\, d\theta$

$|f(z)| \le M \ \forall z \in C$ $\boxed{\text{Prop 5}}$

$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M\,\text{Long}(C)$

⑦ $\left|\int_C \frac{1}{z^4}\,dz\right| \le M\sqrt{2}$

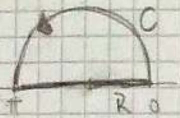
$|f(z)| = \frac{1}{|z|^4} \le (\sqrt{2})^4 = 4$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \le |z| \le 1$ $\quad \sqrt{2} \ge \frac{1}{|z|} \ge 1$

Sobre C $\boxed{|f(z)| \le 4}$

→ Prop (5) contornos.

⑧



Uso Lema de Jordan

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$

$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]} \frac{1}{|a^2+R^2e^{2i\theta}|}$

$= \frac{1}{R^2-a^2}$

$z(t) = Re^{it}$ $t\in[0,\pi]$

$z'(t) = Rie^{it}$

$D_f = \mathbb{C} - \{ia, -ia\}$

$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \pi R M_R$

$\lim_{R\to\infty} g(R) = 0$ sii $\lim_{R\to\infty} |g(R)| = 0$ (1)

$\frac{1}{3!}$ +

$|g(R)| = \left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{R^2-a^2}$

$0 \le |g(R)| \le \frac{\pi}{R^2-a^2}$

$0 \le \lim_{R\to\infty} |g(R)| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^2-a^2} = 0$ ∴ Por (1) $\boxed{\lim_{R\to\infty} g(R) = 0}$

Buena, preguntar: 7✓, 8✓, 9 que tienen la misma idea.

Multiplemente conexo

16

Otra forma de acotarlo:

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ $\quad |f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+a^2|} \le \frac{|e^{iz}|}{||z|^2-a^2|}$

$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2|$

$\le |z_1| + |z_2|$

Sobre γ

$e^{iz} = e^{-R\operatorname{sen}\theta}\, e^{iR\cos\theta}$ $\quad |e^{iz}| = e^{-R\operatorname{sen}\theta}$ $\quad 0\le\theta\le\pi$

$0 \le \operatorname{sen}\theta \le 1$

$0 \ge R\operatorname{sen}\theta \ge -R$

Después lo probó igual a mí.

8) b) $\lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_\gamma \frac{\log z}{z^2}} dz = 0$

$$f(z) = \frac{\ln R + i\overset{\text{Arg}(z)}{\theta}}{R^2 e^{i2\theta}}$$

$$|f(z)| = \frac{|\ln R + i\theta|}{R^2} \leq \frac{|\ln R| + |\theta|}{R^2}$$

Tomaremos $R \to \infty$ (∴ $R > 1$)

$$|f(z)| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2}$$

$$\left|\int_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz\right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2}\pi R = \frac{\ln R + \pi}{R}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\ln R + \pi}{R} \underset{\substack{\downarrow \\ L'H}}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \frac{\text{Log}(z)}{z^2} dz = 0$$

26) f holomorfa $z / |z - z_0| < R$

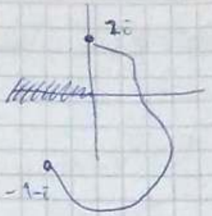
f continua $z / |z - z_0| = R$

con $|f(z)| \leq M$ para $z / |z - z_0| = R$

Probar: $\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!\, M}{R^n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

sigo en la otra hoja

$\int_C \frac{1}{z} dz =$



uso un log que no me corte la recta

$f(z) = F'(z)$

$F(z) = \log z$

$= \ln|z| + i\arg z \ , \ -\pi < \arg z \leq \pi$

$\int_C \frac{1}{z} dz = F(-1-i) - F(2i)$

$= \ln|-1-i| + i\arg(-1-i) - (\ln(2i) + i\arg(2i))$

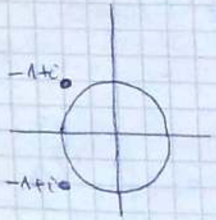
$= \ln\sqrt{2} - i\frac{3}{4}\pi - \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2$

$+ i\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi\right.$

$= -\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{5}{4}\pi$

$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2} dz \quad C: |z| = 1$

uso T. int de Cauchy

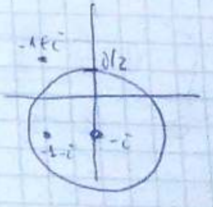


$\int_C \frac{1}{(z-(-1-i))(z-(-1+i))}$

$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$ es $H(C)$ y $RI(C) \Rightarrow \int_C f(z) dz = 0$

Ahora con $|z + i| = 3/2$

$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2} dz = \int_C \frac{1/(z+1-i)}{(z-(-1-i))}$

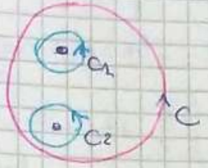


Aplicamos TIC con $z_0 = -1-i$ $\quad f(z) = \frac{1}{z-(-1+i)}$

$$\int_C \frac{1}{z^2+2z+2} dz = 2\pi i\, f(-1-i) = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi$$

$c|z| = S$

$$\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}$$



$$= \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2z+2} dz$$

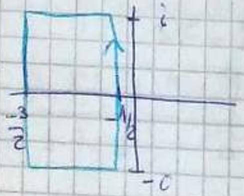
$$+ \int_{C_2} \frac{1}{z^2+2z+2} dz$$

Porque $g(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$ es H en $RI(c) \cap RE(c_1) \cap RE(c_2)$ y en C_1, C_2, C

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} \frac{1/(z-(-1-i))}{z-(-1+i)} dz + \int_{C_2} \frac{1/(z-(-1+i))}{(z-(-1-i))} dz$$

$$\underset{TIC}{\overset{=}{\downarrow}}\ 2\pi i \left[\frac{1}{(-1+i)-(-1+i)} + \frac{1}{(-1-i)-(-1+i)} \right] = 0$$

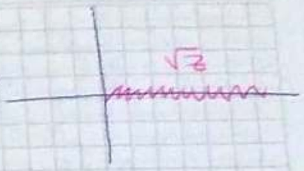
$$\int_C \frac{\sqrt{z-1}}{z+1} dz$$



Siendo $\sqrt{z}$ holom en $\mathbb{C} - \{z / z = x, x \geq 0\}$

$/ \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

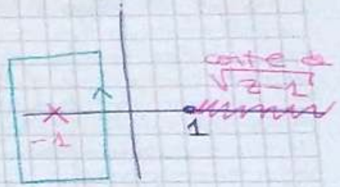
$\frac{\sqrt{z-1}}{z+1}$ es holom en $\mathbb{C} - \{z = -1\}$
$- \{z / z = x, x \geq 1\}$



$\sqrt{z-1}$ es $H(c)$ y $H(RI(c)$

$z_0 = -1 \in RI(c)$

c cerrado ⊕,



$$\text{TIC}\quad \int_C \frac{\overbrace{\sqrt{z-1}}^{f(z)}}{z+1} dz = 2\pi i \overbrace{\sqrt{-1-1}}^{f(z_0)}$$

$$\sqrt{-2} = e^{+1/2 \operatorname{Log}(-2)} = 2\pi i\, e^{1/2 \ln|z| + i \arg(-2)}$$
$$= 2\pi i\, 2^{1/2} e^{i \frac{\arg(-2)}{2}} = ⊛$$

Como:

$$\sqrt{i} = e^{1/2 \ln|i| + i \arg i} = e^{\frac{i \arg i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\arg i}{2} = \pi/4 \xrightarrow{\text{tomo}} \boxed{\arg i = \frac{\pi}{2}}$$

$$= ⊛ = 2\pi i\, 2^{1/2} \cdot e^{i\pi/2} = 2\pi \cdot 2^{1/2} i = -2\pi\, 2^{1/2}.$$

21) i) $\int_C \frac{z^3-2}{(z+1)^2} dz \quad C: |z| = 3$ | $f(z) = z^3 - 2 \rightarrow$ holo en c
$z_0 = -1$

$$\int_C \frac{z^3-2}{(z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 6\pi i$$

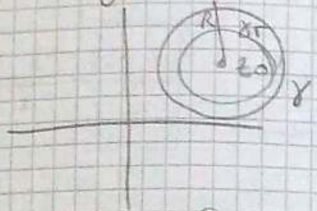
$\frac{1}{3!} +$

2) iii) $f(z) = sh(2z+4) \to$ holo en $\mathbb{C}$

$$\int_C \frac{sh(2z+4)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i \, 4 sh(2\cdot 0+4)$$

$$= 4\pi i \, sh(4)$$

Sigo el ej 26



f H en RI(γ),
f cont en γ

Por TICG $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$0 < r < R$

$$\frac{2\pi}{n!} |f^{(n)}(z_0)| \leq \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right|$$

¿No tendrían que ir adentro los módulos?

sobre γ_r

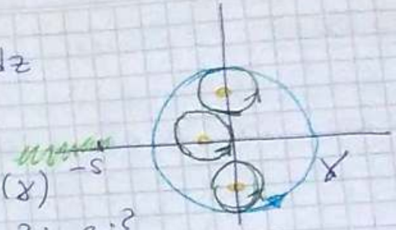
$$\left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(z)|}{r^{m+1}}$$

$$\frac{2\pi}{n!} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{2\pi}{r^2} |f(z)| \to \frac{2\pi}{R^2} M$$

Tomo limite
$r \to R$

$$\therefore |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^m} M$$

19) d) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{Log(z+5)}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$



$\frac{1}{3!}$ +

f holomorfa sobre γ y en RI(γ)
$- \{-1, 2i, -2i\}$

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{\overbrace{\frac{Log(z+5)}{z^2+4}}^{f_3(z)}}{(z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_3'(-1) = \frac{2\pi i (5+8\ln 4)}{100}$$

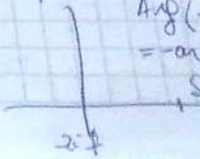
$$f_3'(-1) = \left. \frac{\frac{1}{z+5}(z^2+4) - 2z \, Log(z+5)}{(z^2+4)^2} \right|_{-1} = \frac{\frac{5}{4} + 2 Log(4)}{25}$$

$$f_3'(-1) = \frac{\frac{5}{4} + 2\ln(4)}{25}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{\overbrace{\frac{Log(z+5)}{(z+1)^2(z-2i)}}^{f_2}}{(z+2i)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_2(-2i)$$

$$f_2(z)\Big|_{-2i} = \left. \left(\frac{Log(z+5)}{(-2i+1)^2(-4i)} \right) \right|_{-2i} = \frac{\ln\sqrt{29} + i \, Arg(-2i+5)}{-4i(-3-4i)}$$

$Arg(-2i+5)$
$= -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$



Consecuencias de TIC y TICG

Corolario $f = u + iv$ es $H(D) \Rightarrow u, v$ son C^{∞} en D

Dem: sea $z_0 \in D$ f holom en $z_0 \Rightarrow f$ tiene todas las derivadas de f en z_0.

$$f'(z_0) = u'_x + i v'_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CR}}}{=} u_x - i v'_y$$

$$f''(z_0) = u'_{xx} + i v'_{xx} = u'_{xx} - i u'_{yx}$$

$$f'''(z_0) = u'_{xxx} + i v'_{xxx} = u'_{xxx} - i u'_{yxx}$$

$\Rightarrow u$ y v se pueden derivar tantas veces como uno quiera

Corolario: Teorema de Liouville si f es entera y acotada $\Rightarrow f$ es cte

Dem f es holo en todo $\mathbb{C}$

f acotada $\exists M > 0$ $|f(z)| \le M$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Sea γ una circunf de centro z_0 y radio R

$\Rightarrow$ TICG $$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

!

$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$ para cualquier $R \geq 0$ $\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M\, n!}{R^n}}$

$\Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$ $\forall z_0$

$f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = $ cte (Prob 28, 3.1)

$\frac{1}{3!} +$

Corolario 2: Si f es entero y no cte $\Rightarrow f$ no está acotado en $\mathbb{C}$

Ej:
$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \text{sen}(z) \\ f(z) = e^{z} \\ f(z) = z^3 + 2iz \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{enteros no ctes} \\ \Downarrow \\ \text{no acotados en } \mathbb{C} \end{array}$$

Corolario 3: (Teo Morera) Sea f continua en D y $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en D $\Rightarrow f$ es holomorfa en D.

Dem si $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en D $\Rightarrow f$ tiene primitiva en D. Existe $F(z)$ holomorfa / $F'(z) = f(z)$ como $F(z)$ es holo en D $\Rightarrow f$ tiene todas sus derivadas $\Rightarrow F''(z) = f'(z)$ $\forall z \in D \Rightarrow f$ es holomorfa en D.

Principio de módulo máximo

Si f es holom en dominio abierto $D \Rightarrow f$ no alcanza mód máx en D

Def f alcanza mód máx en D si:
$\exists z_0 /$ $|f(z)| \le |f(z_0)|$

Ejemplo
$f(z) = e^{z}$ / $D = \{ z \in \mathbb{C} / \text{Re } z < 1 \} = \{ z = x + iy, x < 1 \}$

$|f(z)| = |e^{x+iy}| = e^{x} < \underset{\hookrightarrow \text{cota sup.}}{e}$

$\downarrow$ mínima cota sup

pero no alcanza esa cota en D

$\nexists z_0 \in D / |f(z)| \le |f(z_0)|$

supremo

Consecuencias de TIC y TICG

Corolario $f = u+iv$ es $H(D) \Rightarrow u, v$ son C^{∞} en D

Dem: sea $z_0 \in D$ f holom en $z_0 \Rightarrow$ f tiene todas las derivadas de f en z_0.

$$f'(z_0) = u'_x + iV'_x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CR}}}{=} u_x - iV'_y$$

$$f''(z_0) = u'_{xx} + iV'_{xx} = u'_{xx} - iu'_{yx}$$

$$f'''(z_0) = u'_{xxx} + iV'_{xxx} = u'_{xxx} - iu'_{yxx}$$

$\Rightarrow$ u y v se pueden derivar tantas veces como uno quiera

Corolario: Teorema de Liouville si f es entera y acotada $\Rightarrow$ f es cte

Dem f es holo en todo $\mathbb{C}$
f acotada $\exists M > 0 \quad |f(z)| \le M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Sea γ una circunf de centro z_0 y radio R

$\Rightarrow$ TICG $\quad f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$

$|f'(z_0)| \le \dfrac{M}{R}$ para cualquier $R \geq 0$ $\quad \boxed{|f^{(n)}(z_0)| \le \dfrac{M\,n!}{R^n}}$

$\Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \ \forall z_0$

(Prado 28,3,1) $\qquad \dfrac{1}{3!} +$

$f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = cte$

Corolario 2: Si f es entera y no cte $\rightarrow$ f no está acotada en $\mathbb{C}$

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(z) = \operatorname{sen}(z) \\ f(z) = e^z \\ f(z) = z^3 + 2iz \end{array}\right\}$ enteras no ctes $\Downarrow$ no acotadas en $\mathbb{C}$

Corolario 3: (Teo Morera) Sea f continua en D y $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en D $\Rightarrow$ f es holomorfa en D.

Dem si $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado c en D $\Rightarrow$ f tiene primitiva en D. Existe $F(z)$ holomorfa / $F'(z) = f(z)$ como $F(z)$ es holo en D $\Rightarrow$ F tiene todas sus derivadas $\Rightarrow F''(z) = f'(z) \ \forall z \in D \Rightarrow$ f es holomorfa en D.

Principio de módulo máximo

f es holom en dominio abierto D $\Rightarrow$ f no alcanza mod max en D

D Si

$C_R(z_0)$: $z = z_0 + Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta}\,d\theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow$ TICG $\quad f^{n}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}}{R^{n+1}\,e^{i(n+1)\theta}}\,d\theta$ ③

$|f^{n}(z_0)| = |\text{todo}|$

$\Rightarrow |f^{n}(z_0)| \le \left|\dfrac{n!}{2\pi i}\right| \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{i\theta})| \left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\right| d\theta = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\frac{1}{R^n}\,d\theta = \frac{n!\,M}{2\pi R^n}$

$|f(z)| = |e \quad | = e \ < \underset{\hookrightarrow \text{cota sup}}{e}$

pero no alcanza esa cota en D $\quad$ mínima cota sup — supremo

$\nexists z_0 \in D \ / \ |f(z)| \le |f(z_0)|$

Recordemos

Teo de Weierstrass: una func continua en un conj D, cerrado y acotado, alcanza máx y mín.

Corolario (del ppio de mód máx)

Sea f holomorfa en un dominio abierto acotado D, continua en la frontera de D (∂D) $\Rightarrow$ f alcanza módulo máx en ∂D

(Prob 29, 30)

(Es decir, $\exists z_0 \in \partial D \,/\, |f(z)| \leq |f(z_0)| \; \forall z \in D \cup \partial D$

Funciones armónicas

$u: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en D si es C^2 en D y $\underbrace{\Delta u}_{\text{laplaciano de } u} = 0$

$$\Delta u = u''_{x_1 x_1} + \ldots + u''_{x_n x_n}$$

En $\mathbb{R}^3$ $\quad \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$

En $\mathbb{R}^2$ $\quad \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$

En $\mathbb{R}$ $\quad \Delta u = u''_{xx}$

¿Cuáles son las func. armónicas en $\mathbb{R}$?

Satisf $u''_{xx} = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b \rightarrow$ lineales.

en $\mathbb{R}^2$?

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = ax + by + c \\ u(x,y) = xy \\ u(x,y) = x^2 - y^2 \\ u(x,y) = \cos(x)\,\operatorname{senh}(y) \end{array}\right\} \text{armónicas en } \mathbb{R}^2$$

$u(x,y) = \ln(x^2 + y^2) \longrightarrow$ armónica $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$u(x,y) = e^x \cos(y)$

$u(x,y) = \operatorname{Sh}(x)\,\operatorname{sen}(y)$

Teorema: Si $f = u + iv$ es holomorfa en D $\Rightarrow$ u y v son armónicas en D.

Dem: como f tiene todas sus derivadas $\Rightarrow$ u, v son C^∞ en D $\Rightarrow$ son C^2

Se verifica C-R $\quad u'_x = v'_y$ en D
$\quad u'_y = -v'_x$

Deriv $u''_{xx} = v''_{yx}$ $\qquad$ como v es $C^2 \rightarrow v''_{xy} = v''_{yx}$

Deriv $u_{yy} = -v_{xy}$

Luego: $u''_{xx} = -u''_{yy}$ ó $\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$

$\Downarrow$

u es armónica en D.

Similarmente v es armónica

Def Si $f = u + iv$ es holom. en D se dice que v es armónica conj de u

$\frac{1}{3!}$ +

Ejs de armónica u y su armónica conj v

$u(x,y)$	$v(x,y)$	$f(z)$
x^2-y^2	$2xy$	z^2
xy	$\frac{y^2-x^2}{2}$	$-i\frac{z^2}{2}$
$\text{sh}\,x\,\text{sen}\,y$	$\text{ch}\,x\cos y$	$\text{sh}\,z$
$e^x\cos y$	$e^x\,\text{sen}\,y$	e^z
$e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$	$e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)$	e^{z^2}
$e^{\text{Re}\,z^2}\cos\text{Im}\,z^2$		
$\ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\mathbb{1}\{x>0\}$ $+\left[\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi\right]\mathbb{1}\{x<0,y>0\}$ $+\pi/2\,\mathbb{1}\left\{\begin{matrix}x\leq 0\\ y>0\end{matrix}\right\}$ $+\frac{-\pi}{2}\mathbb{1}\left\{\begin{matrix}x=0\\ y<0\end{matrix}\right\}$	$\text{Log}(z)$

Teorema: Sea u armónica en D y D simp conexo $\Rightarrow \exists$ una armónica conj v en D

Dem: Sea $\bar{F}(x,y)=(-u'_y,u'_x)=(p,q)$

$q'_x=u''_{xx}$ Como $u''_{xx}+u''_{yy}=0$

$p'_y=-u''_{yy}$ $q'_x-p'_y=0$

$q'_x=p'_y$

$\Rightarrow$ F tiene matriz jacobiana simétrica. Al ser D simpl. conexo $\Rightarrow$ F es conservativo.

Existe función potencial v / $F(x,y)=\nabla v(x,y)=(v'_x,v'_y)$

Pero $F(x,y)=(-u'_y,u'_x)=(v'_x,v'_y)$

$\Rightarrow\begin{cases}-u'_y=v'_x\\ u'_x=v'_y\end{cases}$ CR! u es dif por ser C^2 y v tmb es C^2 v tmb es dif.

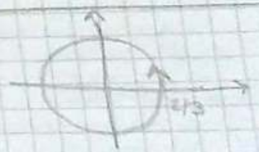
Definimos $f(z)=u+iv\Rightarrow f$ es holom en D

$\Rightarrow$ v es conj armónica de u.

$g(z)=-if(z)=v-iu \Rightarrow -u$ es conj arm de v

---

7) b) $\left|\int_C\frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}dz\right|\leq\frac{8}{3}\pi$



$f(z)=\frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\Rightarrow|f(z)|=\frac{|\bar{z}|}{|\bar{z}+1|}=\frac{|z|}{|\bar{z}+1|}$

$\leq\frac{|\bar{z}|}{||\bar{z}|-|1||}=\frac{|z|}{||z|-1|}$

$=\frac{2/3}{|2/3-1|}=\frac{2/3}{1/3}$

$=2=M$

Por Prop 5

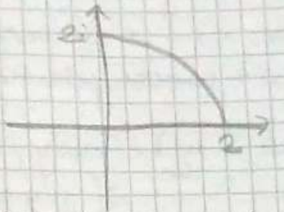
$\left|\int_C\frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}dz\right|\leq M\,L_C=M\,2\pi\cdot\frac{2}{3}$

$=M\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

$\frac{1}{3!}+$

c) $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz\right| \leq \frac{\pi}{3}$

C: circunf $|z|=2$ en el 1° cuad



$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{\left|\underbrace{|z^2|}_{|z|^2} - |1|\right|} = \frac{1}{|4-1|}$

$= \frac{1}{3} = M$

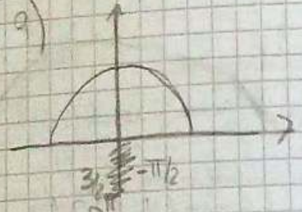
$|z-w| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$

$\frac{1}{||z|-|w||} \geq \frac{1}{|z+w|} \geq \frac{1}{|z|+|w|}$

$\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz\right| \leq M L_C = \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

$L_C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{4} = \pi$

9)



$z = 2e^{i\theta}$

$\int_C \frac{z-2}{z}\, dz = \int_C \left(1 - \frac{2}{z}\right) dz$

$= \boxed{\pi} - 2\int_C \frac{1}{z}\, dz = \boxed{\dagger}$

$f(z) = \frac{z-2}{z} = 1 - \frac{2}{z}$

$z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$

Elijo corte de rama:

$z \in \mathbb{C} / \{y<0,\ x=0\}$

$\frac{-\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi$

$g(z) = \frac{1}{z} = G'(z)$

$G(z) = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

---

5. Sea $f: A \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ continua en A y γ una curva simple orientada incluída en A. Demostrar que $\mathrm{Re}(\int_\gamma f(z)dz)$ y $\mathrm{Im}(\int_\gamma f(z)dz)$ dan respectivamente, la circulación a lo largo de γ y el flujo del campo vectorial $(u, -v)$ a través de γ. HT

6. Calcular la longitud del arco del cicloide, curva cerrada parametrizada como: $z(t) = a(t - \operatorname{sen} t) + a\,i(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ con a un real positivo. ✓ Se hace [illegible]

$\frac{1}{3!}$ +

⑦ Sin calcular la integral, obtener las siguientes acotaciones:

(a) $\left|\int_C \frac{1}{z^4}\, dz\right| \leqslant 4\sqrt{2}$ C: segmento que une los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1$.

(b) $\left|\int_C \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\, dz\right| \leqslant \frac{8}{3}\pi$ C: circunferencia $|z| = \frac{2}{3}$, recorrida en sentido positivo.

(c) $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$ C: circunferencia $|z| = 2$, en el primer cuadrante.

⑧ Sea γ la semicircunferencia superior de $|z| = R$. Probar que:

(a) $\lim_{R \to +\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz = 0$ (b) $\lim_{R \to +\infty} \int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz = 0$

9. Evaluar (i) $\int_C \frac{z-2}{z}\, dz$ y (ii) $\int_{-C} |z|^{1/2} \exp(i\,\mathrm{Arg} z)\, dz$ donde C es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

$\int^{k2\pi}$

10. Calcular la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-c}$ con γ un contorno que encierra a $z_0 = c$, recorrido una vez en sentido antihorario. Analizar en qué varía el resultado si se recorre γ n-veces, $n \in \mathbb{N}$. ¿Contradice la independencia de la parametrización?

11. Clasificar a los conjuntos conexos del ejercicio 21 (a) del Trabajo Práctico Nro. 2 en simplemente o multiplemente conexos.

12. Denotamos $\mathcal{H}(D) = \{f : D \to \mathbb{C}$ holomorfas en $\mathbb{C}\}$. Decir qué condiciones debe cumplir un conjunto D de $\mathbb{C}$ para que:

(a) si $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces cualquiera sea el contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, resulta $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, (confrontar con el ejercicio 3) D conexo

(b) si f es continua en D, y para todo contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(D)$. D abierto y conexo

$= \circledast = \pi - 2\int_0^\pi \frac{1}{z}\,dz = \pi - \cancel{\ln|z| + i\arg_0(z)\Big|_{2}^{-2}} \cdot 2 \to$ [illegible]

$\frac{1}{3!} +$

$= \pi - 2\int_0^\pi \frac{1}{\cancel{2}e^{i\theta}} \cdot \cancel{2}ie^{i\theta}\,d\theta = \pi - 2i\pi = (1-2i)\pi$ ✓

ii) $-\int_0^\pi |z|^{1/2} e^{i\,\mathrm{Arg}_0 z}\,dz = -\int_0^\pi |2e^{i\theta}|^{1/2} e^{i\,\mathrm{Arg}_0(2e^{i\theta})} \cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta$

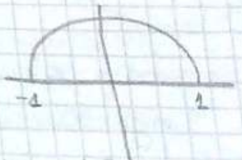
$= -\int_0^\pi 2^{1/2} e^{i\theta} \cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta$

$= -\int_0^\pi i2\sqrt{2}\, e^{i2\theta}\,d\theta = -2\sqrt{2}\, i\, \frac{e^{i2\theta}}{2i}\Big|_0^\pi = -2\sqrt{2}\,\frac{\overbrace{e^{i2\pi} - 1}^{0}}{2i}$

$= 0$

⑬ b)

i) $f(z) = \frac{1}{z}$ sale como 9) i)



ii) uso Teo de Inv homotópico

f es holom en C_1, C_2 y $RI(C_2) \cap RE(C_1)$

⑭ b) $f(z) = z^3$ → tiene primitiva en $\mathbb{C}$

→ $\int_C f(z)\,dz$ no depende del camino solo de puntos inicial y final

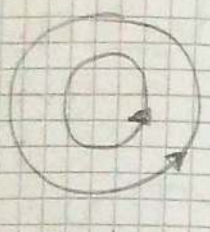
(15) $D = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2\}$ $\gamma = \partial D$

$\frac{e^z}{z^2+9}$ es holom por ser compos. de func. enteras salvo en $-3i$ y $3i$

$\frac{\cos(z)}{\text{sen}(z)}$ es holom ([illegible]) salvo en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

Por inv homotópica sé que si f es holom en C1, C2 y RI(C2) ∩ RE(C1) orientadas (+)



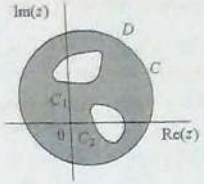
$$\Rightarrow \int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz$$

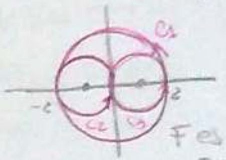
Para ambas f's la región entre γ_1 y γ_2 no tiene singularidades y al estar una orientada en sentido opuesto a la otra, ocurre que por inv homot: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{-\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz} + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz + \int_{C_3} f\,dz$

por teo de inv homotópica





$\frac{1}{3!}$ +

F es holom y RI(C1) ∩ RE(C2) ∩ RE(C3) no contiene singularidades (1 y -1)

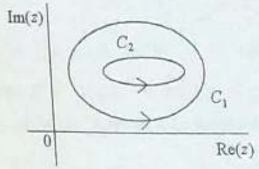
(b) Mostrar:

$$\int_{|z|=2} \frac{\text{sen}\, z}{z^2-1} dz = \int_{|z-1|=1/2} \frac{\text{sen}\, z}{z^2-1} dz + \int_{|z+1|=1/2} \frac{\text{sen}\, z}{z^2-1} dz$$

(c) Analizar bajo qué condiciones $\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$ siendo

$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ y C_1 y C_2 como se indican en el gráfico:

a y b no pueden pertenecer a RI(C1) ∩ RE(C2)



18. Aplicando la fórmula integral de Cauchy, integrar la función $f(z) = \frac{2z^2-4}{z^2+1}$ a lo largo del círculo de radio 1 y recorrido una vez en sentido antihorario, con centro en:

(a) $z=i$ (b) $z=\frac{1}{2}$ (c) $z=-i$

19. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_{|z|=1} \frac{z^2+4}{z}\, dz$ (b) $\int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3}\right) dz$ (c) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\text{Log}\,(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\, dz$

20. Calcular todos los posibles valores de la integral $\int_\Gamma \frac{dz}{z(z^2-1)}$ para diferentes contornos cerrados Γ que no pasen por $0, 1$ y -1.

f tiene primitiva

f holomorfa en γ y λ y sus regiones en común entre

13. (a) Explicar bajo qué condiciones es válido $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\lambda} f(z)\,dz$, para dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(a)=\lambda(a)$ y $\gamma(b)=\lambda(b)$ (independencia del camino).

$\frac{1}{3!}$ +

(b) Analizar si es posible utilizar, y cómo, el resultado del ejercicio 2 (b) para calcular:

(i) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ C: semicircunf. inferior de $|z|=1$ desde $z_1=1$ hasta $z_2=-1$.

(ii) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ C: curva definida por $x^4+y^4=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

14. Calcular, en cada caso, la integral de línea de la función f a lo largo de los contornos C indicados:

✓ (a) $f(z)=\frac{1}{z^2+2z+2}$ $C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$.

(b) $f(z)=z^3$
   (i) $C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$,
   (ii) C: recta que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
   (iii) C: arco de circunferencia de centro 0 y radio 1 que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
   (iv) C: un contorno que une los puntos $z=1$ y $z=i$.

HC (c) $f(z)=z\,\mathrm{sen}(z^2)$ C: contorno que une los puntos $z=-i\pi$ y $z=i\pi$.

15. Sea $D=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$ y γ la frontera de D, orientada de modo que los puntos de D están a la izquierda de γ. Probar que $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ para:

(a) $f(z)=\frac{e^z}{z^2+9}$ (b) $f(z)=\mathrm{ctg}\,z$

$\frac{e^{i+1}}{i+1}$ → es primitiva de z^i

16. Calcular, si es posible, $\int_C f(z)dz$ siendo $f(z)=z^i$ (valor principal) según sea:

(a) C: contorno en el semiplano superior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
(b) C: contorno en el semiplano inferior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
(c) C: cualquier contorno que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.

17. (a) Sean D y los contornos C, C_1 y C_2 como se indican en la figura que sigue. Probar que si f es holomorfa en D y continua sobre los contornos C, C_1 y C_2, el valor de la integral de f sobre la frontera de D es cero (o sea que bajo estas condiciones, se puede extender el teorema de Cauchy a dominios múltiplemente conexos). Deducir la relación entre las integrales de f sobre C, C_1 y C_2. (Pag 130 Churchill)

$z^i = e^{i\log z}$

$\frac{z^{i+1}}{i+1} = \frac{e^{(i+1)\log z}}{i+1}$

$\frac{1}{3!}+$

⑯ $f(z) = z^i = F'(z)$ si $D = \mathbb{C} - \{z / x \leq 0, y = 0\}$

$$F(z) = \frac{z^{i+1}}{i+1}$$

$$\int_C z^i dz = \int_1^{-1} z^i dz \underset{\uparrow}{\cong} \int_1^{-1\pm\Delta i} z^i dz = \left.\frac{z^{i+1}}{i+1}\right|_1^{-1\pm\Delta i}$$

$\Delta \approx 0$

para no tener problemas con el corte de rama

$$= \frac{e^{(i+1)\,\mathrm{Log}\, z}}{i+1}$$

$\ln|-1+\Delta i| \times i \arg(-1+\Delta i)$

$$= \frac{e^{(i+1)\,\mathrm{Log}(-1\pm\Delta i)}}{i+1} - \frac{e^{(i+1)\,\mathrm{Log}(1)}}{i+1}$$

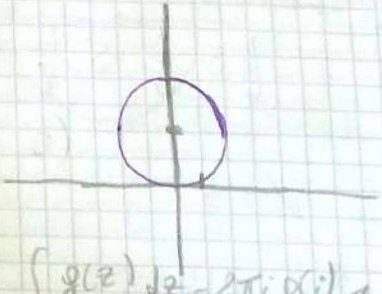
$$= \frac{e^{(i+1)\,\mathrm{Log}(-1)} - 1}{i+1}$$

$\Delta \approx 0$

=

⑱ $f(z) = \frac{2z^2 - 4}{z^2 + 1}$

a)



F es holomorfa por ser compos de func enteras salvo donde se anule el denominador, o sea $z = \pm i$

Sea $g(z) = 2z^2 - 4 / (z - (-i))$

Para el caso a), $g(z)$ es holom en C y RI(C) siendo C un contorno sple cerrado

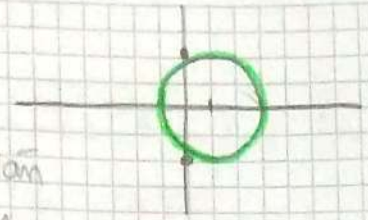
↳ puedo aplicar el Teorema int de Cauchy

$$\int_C \frac{g(z)}{z - i} dz = 2\pi i\, g(i)$$

$$= 2\pi i \cdot 3i = -6\pi \checkmark$$

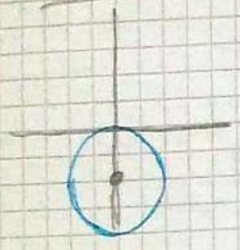
$$g(i) = \frac{2(-1)-4}{2i} = \frac{-6}{2i} = 3i$$

Análgamente en b):



... Pero me doy cuenta que las singularidades están fuera de la curva, al estar f en una curva cerrada y siendo f holomorfa en C y $\underbrace{RI(C)}_{\text{simpl conexo}}$, siendo C contorno cerrado $\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

c) ~~Ahora sí,~~ análogamente en c):



$$g(z) = \frac{2z^2+4}{z-i}$$

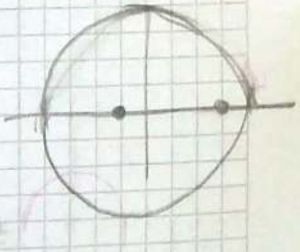
(o.o.)

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z-(-i)} = 2\pi i\, g(-i)$$

$$= 2\pi i \cdot (-3i) = 6\pi$$

(19) b)

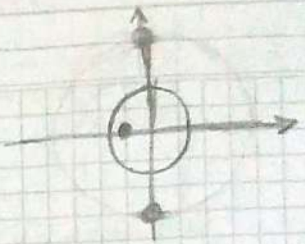
$$\int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3} \right) dz$$



$$= \int_{|z|=4} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}\,dz + \int_{|z|=4} \frac{2e^z}{z-3}\,dz \quad ✓$$

$$= 2\pi i\, \underbrace{(\cos(\pi \cdot -1))}_{-1} + 2\pi i \cdot \overset{2}{} e^3 = (-1+e^3)\,2\pi i \quad ✓$$

c) $$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{Log}(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\,dz$$



$$= 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{Log}(-1+2)}{(-1)^2+4} = 0 \quad ✓$$

$\nearrow \frac{1}{z(z^2-1)}$

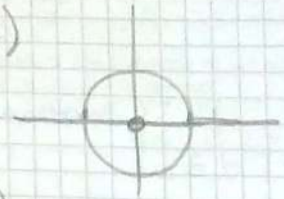
✗ (20) La integral va a dar cero porque f es holomorfa en $RI(\Gamma)$ y Γ y $RI[\Gamma]$ es simpl conexo.

0, 1, -1 pueden estar en RI(C)

o sea que tengo que poner los otros 2 resultados de TIC

(21) iv) $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$ $n > 0$

Para i)



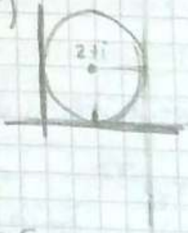
TICG

$\nearrow$

$$\int_{|z|=0} \frac{e^z}{z^n}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(0) \quad ✓$$

$$= \frac{2\pi i}{n!}$$

Para ii)



como f es holo en RI(C) y C y RI(C) es simpl conexo

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0 \quad ✓$$

(22) TICG

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

Si f es holo en $\gamma \cup \mathrm{int}(\gamma)$ (asumo sple) $\Leftarrow$ si $a \in \mathrm{int}(\gamma)$

por TIC

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \quad ?$$

si $a \notin \mathrm{int}(\gamma)$

$\Rightarrow$ las integrales dan 0 y se verifica si es simpl conexo

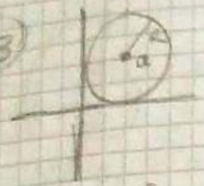
$\frac{1}{3!}$ +

$f(a)$ ie^{it} $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}} \cdot Rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R$ dt

$dz = iRe^{it} dt$

$\uparrow$

23)



$z = a + Re^{it}$ ✓

f(z) holom ⇒ f(z) continua

$$\int_{|z-a|=R} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,Rie^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i f(a+Re^{it})(z-a)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i f(z)(z-a)^2}{z-a} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i f(a+Re^{it}) Re^{2it}}{z-a} dt$$

$$= 2\pi i \cdot f(a)$$

31) f entera
$f(z) = f(z+1) = f(z+i)\ \forall z$] Doblemente periódica

Si $f(z) = f(z+1)\ \forall z \in \mathbb{C}$
⇒ f es periódica de periodo 1

Si $f(z) = f(z+i)\ \forall z \in \mathbb{C}$ ⇒ f es periódica de periodo i

$f(z) = \text{sen}(2\pi z)$
$f(z) = f(z+1)$

$g(z) = e^{2\pi z}$
$g(z+i) = e^{2\pi(z+i)} = e^{2\pi z + 2\pi i}$
$= e^{2\pi z} \cdot e^{2\pi i} = e^{2\pi z}$
$= g(z)$

f por ser continua es acotada en $D = [0,1] \times [0,1]$
$\boxed{D}$ $|f(z)| \leq M\ \forall z \in D$
Dado $z \in \mathbb{C}$ $\exists k, h \in \mathbb{Z}$ / $\hat{z} = z - k - hi \in D$

$$f^2(-1) = \frac{2}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z+1)^2} dz \Rightarrow = \pi i \cdot (-6)$$

Teo Cauchy gen

$z^3 - z$
$\downarrow$
$3z^2 - 1$
$\downarrow$
$6z$

21. Calcular la integral de línea de las siguientes funciones: $\rightarrow = 2\pi i \cdot \frac{3^4}{(3-1)^2} = \frac{\pi i 81}{2}$

(i) $f(z) = \dfrac{z^3 - z}{(z+1)^2}$ (ii) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-1)^2(z-3)}$

(iii) $f(z) = \dfrac{\text{sh}\, z}{(z^2-1)^2}$ (iv) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^n}$ para $n > 0$

sobre el círculo de radio 2 y centro en: (a) $z = 0$, (b) $z = 2 + i$.

$\frac{1}{3!}$ +

(H)

22. Mostrar que si $f(z)$ es holomorfa en $\Gamma \cup \text{int}(\Gamma)$ donde Γ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$, entonces $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-a)}\,dz, \quad \forall a \notin \Gamma.$

23. Probar que si $f(z)$ es holomorfa en un dominio D y si el disco cerrado $|z-a| \leqslant R$ está en D, entonces $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})\,dt.$

Este resultado puede interpretarse como un teorema del valor medio que expresa el valor de f en el centro de la circunferencia como un "promedio" de los valores sobre la misma.

24. Sea $f(z)$ una función holomorfa en $|z-a| < R$. Si $0 < r < R$, demostrar que
$$f'(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, e^{-it}\, dt.$$

$F \in H(D) \Rightarrow F \in C_1(D) \Rightarrow$ clase

25. Explicar por qué si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, existen todas las derivadas parciales de u y de v y son continuas en D. $\boxed{\text{clase}}$

26. Demostrar que si f es holomorfa en $|z-z_0| < R$ y continua en $|z-z_0| = R$ con $|f(z)| \leq M$ en $|z-z_0| = R$, entonces
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TCG tomando modulo de ambos lados y con prop 4

27. Probar que si $f(z)$ es holomorfa y $|f(z)| < \dfrac{1}{1-|z|}$ en $B(0,1)$ entonces $|f'(0)| \leq 4$.

28. Justificar que, a excepción de la función nula, no existe función entera que tenga límite 0 en ∞.

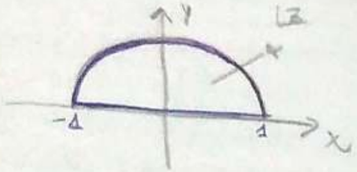
29. (a) Hallar el máximo de $|ze^z + z^2|$ y el de $|iz^2 - 2z|$ sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \text{y } \text{Im}(z) \geq 0\}$

(b) Hallar el máximo de $|\cos z|$ sobre el cuadrado $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}\, z \leq 2\pi, 0 \leq \text{Im}\, z \leq 2\pi\}$

30. Sea f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ si $|z| < 1$ y $|f'(0)| \leq 1$. (Sugerencia: considerar $\dfrac{f(z)}{z}$ en $\bar{B}(0,r)$).

㉙ a) Máx $|ze^{z}+z^{2}|$, $z\in\mathbb{K}=\{z\in\mathbb{C} / |z|\le 1, Im(z)\ge 0\}$

Sea $f(z)=ze^{z}+z^{2}$
↳ f entera



Sabemos

1) $|f(z)|\le M \ \forall z\in\mathbb{K}$

2) Máx $\{|f(z)|, z\in\mathbb{K}\}$ está en $\partial(\mathbb{K})\}$

Analizo $|f(z)|;\ z\in\partial\mathbb{K}$

$z=x;\ |x|\le 1$

$|f(x)|=|\underbrace{x e^{x}+x^{2}}_{g(x)}|=\underbrace{|x|}_{\le 1}\,\underbrace{|e^{x}+x|}$

$g'(x)=e^{x}(x+1)+2x$ ↗ pue

g(x) estrictam creciente
=) para $x\in[-1,1]$
el máx lo
alcanza en 1

$\boxed{|f(x)|=1(e+1|}$

• $z=e^{it}$, $t\in[0,\pi]$

$|f(e^{it})|=|e^{it}(e^{e^{it}}+e^{it})|=|e^{\cos(t)+i\,sen(t)}+e^{it}|\underbrace{|e^{it}|}_{1}$

$=\dots$

$f(z)=z(e^{z}+z)$

$|f(z)|=|z|\,|e^{z}+z|\le|z|\,(|e^{z}|+|z|)\le e+1$

Ver que existe $z_0\in\partial\mathbb{K} / |f(z_0)|=e+1$

$f(1)=e+1$; máx $\{|f(z)|, z\in K\}=e+1$

---

entera }
lim 0 en ∞ } → función nula.

$f(z)=f(\hat{z}+k+ni)\underset{\substack{\downarrow\\ \text{per } i}}{=}f(\hat{z}+n)\underset{\substack{\downarrow\\ \text{per } 1}}{=}f(\hat{z})$

$\frac{1}{3!}+$

$\Rightarrow |f(z)|\le|f(\hat{z})|\le M$ por ser $\hat{z}\in D$

Dado $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le M\Rightarrow f$ es acotada (y entera)
⇒ por T de Liouville, f es cte.

㉘ Si f entera, $\lim_{z\to\infty} f(z)=0\Rightarrow f(z)=0\ \forall z\in\mathbb{C}$

Si $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$

dado $\varepsilon>0\ \exists K>0 / |z|>K\Rightarrow|f(z)-0|<\varepsilon$

En $|z|\le K$ (interior de la circunf), f está acotada por ser continua.
Es decir, $\exists M / |f(z)|\le M\ \forall z / |z|\le K$
Sea $\hat{M}=\max\{\varepsilon, M\}$
Luego $|f(z)|\le\hat{M}\ \forall z\in\mathbb{C}$
f está acotada, por T de Liouville, f es cte,
$f(z)=c\ \forall z\in\mathbb{C}$
Como $\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} c=c=0\Rightarrow f(z)=0\ \forall z\in\mathbb{C}$

(33) a) $u(x,y) = e^{-x}\cos(y)$

$u_{xx} = e^{x}\cos(y)$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$u_{xx} = e^{x}\cos(y)$

$u_{yy} = -e^{-x}\cos(y)$ $\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\Rightarrow$ u es armónica en $\mathbb{R}^2$

b)

$u(x,y) = \ln(x^2+y^2$ $\quad D = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$

$u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $u_{xx} = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{yy} = \dfrac{-2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

e) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

¿Alguna otra forma para ver si u es armónica?

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, f holom D, abierto conexo

$\Rightarrow \begin{cases} u \text{ armónica en } D, \\ v \quad " \quad " \\ \text{además: C-R}, \; u_x = v_y \\ \qquad u_y = -v_x \end{cases}$

31/ Mostrar que si f es una función entera tal que $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para todo z complejo, entonces f es constante.

32. Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $\bar{B}(0,r)$ y holomorfas en $B(0,r)$ con $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$. Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $|z| = r$, probar que existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cg(z)$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$.

Funciones Armónicas

33/ Determinar si las siguientes funciones son armónicas indicando el dominio en que lo son.

(a) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$ (b) $u(x,y) = e^{x}(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$

(c) $v(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x}\cos y + x$ (d) $v(x,y) = e^{xy}\, cos(x^2-y^2)$

(e) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (f) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(g) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

34/ Hallar una función holomorfa $u + i\,v$ tal que su parte real (respectivamente, su parte imaginaria) coincida con la función u (respectivamente, v) de cada ítem del ejercicio 31. Especificar su dominio de holomorfía.

35. Establecer las condiciones que deben cumplir a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean armónicas en $\mathbb{R}^2$:

(a) $u(x,y) = ax + bxy + cy$ (b) $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

36. Probar que si $\phi(x,y)$ es armónica en un dominio S entonces $\psi = \phi_x - i\phi_y$ es holomorfa en S (la función ψ se llama el gradiente conjugado de ϕ).

37/ Justificar por qué si $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa, la función $3u^2 v - v^3$ es armónica respecto a (x,y).

38/ ¿Es la suma de funciones armónicas en un dominio D una función armónica en D? ¿Qué se puede decir respecto al producto?

39. (a) ¿Es cierto que si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas conjugadas en un dominio D del plano entonces $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa en D?

(b) Explicar por qué una función armónica en un dominio D admite una conjugada armónica local en D.

40. Obtener una conjugada armónica de $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$. Hallar la curva ortogonal a la curva definida por $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y) = 1$ en $(1,1)$.

b) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$

$f(z) = ze^z = (x+iy)e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$

↳ entera

$Re(f) = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y = u(x,y)$

$Im(f) = xe^x \operatorname{sen}(y) + ye^x \cos(y) = v(x,y)$

34) Halle f holom en $\mathbb{C}$ /

$Im(f) = v(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\operatorname{sen}(y))$

$g(z) = if(z) = ize^z$ holom en $\mathbb{C}$

$Re(g) = -(xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)$

$Im(g) = e^x(x\cos(y) - y\operatorname{sen} y)$

f holomorfa en D

$f(z) = u + iv$

- v es conj armónica de u

$g(z) = if(z)$ holomorfa en D

$g(z) = -v + iu$

- u es conj arm de $-v$

(37)

$w(x,y) = 3u^2(x,y)v(x,y) - v^3(x,y)$ $\quad u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1° forma verif derivando

2° forma

$(u+iv)^3 = u^3 + 3u^2 iv + 3u(-v^2) + (-iv^3)$

$= (u^3 - 3v^2) + i(3u^2v - v^3) = f(z)^3$

---

41. (a) Probar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$.
    (b) Caracterizar las funciones armónicas $u = u(r)$. Lo mismo si $u = u(\theta)$.
    (c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n(r,\theta) = r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$. Probar que $u_n(r,\theta)$ es armónica y hallar su conjugada armónica $\tilde{u}_n(r,\theta)$.
    (d) Comprobar que $u(x,y) = (x^2+y^2)\cos(2\operatorname{arctg}(y/x))$ es armónica.

Aplicaciones sobre armónicas conjugadas

42. En un cierto medio donde la constante de conductividad térmica es igual a 0.1, las componentes del flujo de calor están dadas por $Q_x \equiv 3$ y $Q_y \equiv -4$. Hallar la distribución de temperatura $\phi(x,y)$, suponiendo que $\phi(0,0) = 0$ y la función de flujo $\psi(x,y)$ tal que $\psi(0,0) = 0$. Describir y graficar las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

43. Sea $\phi(x,y) = 2x - 6y$ la distribución de temperatura estacionaria de un sólido bidimensional. ¿Cuál es la temperatura compleja? Describir las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

44. El potencial complejo de un flujo de fluido está dado por $\Phi(z) = 1/z$ para $z \neq 0$. Hallar la velocidad compleja. Mostrar que la curva equipotencial que pasa por $(1,1)$ es $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Obtener la línea de corriente que pasa por $(1,1)$. Graficar ambas curvas.

45. Encontrar el potencial complejo de un fluido que se mueve con velocidad constante v_0 y cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje real positivo. Hallar las componentes del campo de velocidad. Esbozar las curvas equipotenciales y las líneas de corriente.

46. Explicar por qué $d(x,y) = y + ix$ puede ser un flujo eléctrico complejo pero no puede serlo $\bar{d}(x,y) = x + iy$. Hallar el potencial electrostático, las curvas equipotenciales y las líneas de corriente asociadas a $d(x,y)$.

47. Determinar si las siguientes ecuaciones describen las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo:
    (i) $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+1}\right) = cte$,
    (ii) $\frac{x-y}{x^2+y^2} = cte$,
    (iii) $e^{(x^2-y^2)}\operatorname{sen}(2xy) + x^2 - y^2 = cte$

$g(z) = f^3(z)$ es holom en D por ser comp de fc. holom

$\frac{1}{3!}$ +

$h(z) = z^3$ $\quad g(z) = (h \circ f)(z)$
> entera

$\Rightarrow Im(g) = 3u^2v - v^3$ es arm.

4 Halle f entera / $Im(f) = v(x,y) \overset{x^2-y^2+e^x\cos y + x}{=} Im(iz^2) + Im(ie^z) + Im(iz)$

$v_1(x,y) = x^2 - y^2 = Re(z^2) = Im(iz^2)$

$v_2(x,y) = e^x \cos(y) = Re(e^z) = Im(ie^z)$

$v_3(x,y) = x = Re(z) = Im(iz)$

u, v arm en D

¿u·v arm en D? No necesariamente.

Aplicaciones de funciones armónicas

Fluido bidimensional estacionario (no depende del Tpo)

Campo de velocidad $\overset{\text{irrotacional}}{\text{incompresible}}$

$\bar{v}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$

irrotacional (rot $\bar{v}$ = 0)

$\nabla \times (p, q, 0) = (0, 0, q_x - p_y)$

$q_x - p_y = 0 \Rightarrow v$ tiene Jacob. simétrico

$\frac{1}{z}$

~~simétrico~~ $\Rightarrow$ si el dom es simpl conexo V es conservativo,

$\bar{v}$ es conservativo $\Rightarrow \exists u$ C^1 /

$\bar{V} = \nabla u = (u'_x, u'_y) = (p, q)$

incompresible $\Rightarrow \nabla \cdot \bar{V} = 0$

$\nabla \cdot (p, q) = p'_x + q'_y = 0$

$\Rightarrow p'_x = u''_{xx}$ $\qquad \nabla \cdot \bar{V} = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$q'_y = u''_{yy}$

$\Rightarrow u$ es armónica!

u se llama potencial de velocidad

Como asumimos dominio SC $\Rightarrow \exists$ conj armónico de u,
llamémoslo v:
$f(z) = u + iv$ es holom
en el dominio.

Esa f se denomina potencial complejo

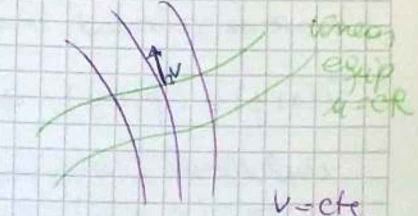
$f'(z) = u'_x + i v'_x = u'_x - i u'_y$

$= p - iq$

$\overline{f'(z)} = p + iq = \bar{V}$

u potencial

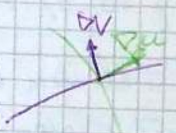
curvas $u(x,y) = $ cte
se denominan equipotenciales



v=cte
líneas de campo
o líneas de corriente

Proposición: Si $f(z) = u + iv$
es holomorfa
$\Rightarrow$ curvas nivel de u son
ortogonales a curvas nivel de v.

Dem ∇u es $\perp$ a u=cte
∇v es $\perp$ a v=cte



$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (v'_x, v'_y)$
$= (u_x, u_y) \cdot (-u_y, u_x) = 0$

Resumen

$\bar{V} = (p, q) = \nabla u$: campo de velocidad

u: potencial de velocidad
v: arm conj de u
función de corriente.

$f(z) = u + iv$ potencial complejo
$f'(z) = \bar{V}$
u=cte líneas equip
v=cte " de campo o de cte.

Ej 44

pot complejo $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z \neq 0$

Hallar $\bar{V}$

$f'(z) = \frac{-1}{z^2}$ $\qquad \overline{f'(z)} = \overline{\left(\frac{-1}{z^2}\right)} = -\overline{\left(\frac{x^2 - y^2 - 2xy\, i}{(x^2+y^2)^2}\right)}$

$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\bar{V} = (p, q) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

Potencial de velocidad

$$u(x,y) = \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

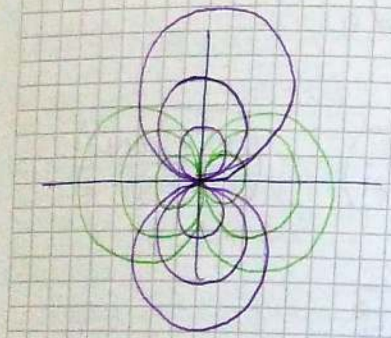
Líneas equip: $u(x,y) = c$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = c \qquad \boxed{\frac{1}{4c} = \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2}$$

Líneas de campo $v(x,y) = k$

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = k$$

$$\frac{1}{4k^2} = x^2 + \left(y + \frac{1}{2k}\right)^2$$



Para Flujo de calor

u: temp de cuerpo bidimensional estacionario
no se genera ni se destruye energía térmica
$u(x,y)$

λ: difusividad térmica

Flujo de calor: $\overline{Q} = -\lambda \nabla u$ (Ley de Fourier)

Flujo de Fluidos, Electrostática y Flujo de Calor

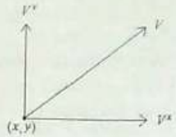
1 Flujo de fluidos

Muchos problemas importantes en dinámica de fluidos se resuelven mediante métodos de variable compleja, con las siguientes suposiciones:

1- El flujo de fluido es bidimensional, es decir, el modelo del flujo y las características del movimiento del fluido en un plano, son esencialmente las mismas en todo plano paralelo. Esto permite confinar nuestra atención no más que a un plano simple, el cual tomamos igual al plano z (o plano (x,y)), en donde las figuras construidas en este plano se interpretan como secciones transversales de "cilindros infinitos" perpendiculares al plano (x,y). Un cilindro infinito no es nada más que un *modelo matemático* de un cilindro físico el cual es tan largo, que los efectos lejanos se pueden despreciar razonablemente.

2- El flujo es estacionario (o uniforme), o sea, la velocidad del fluido en un punto, depende solamente de la posición y no depende del tiempo.

3- Las componentes de la velocidad se derivan de un potencial, es decir, si

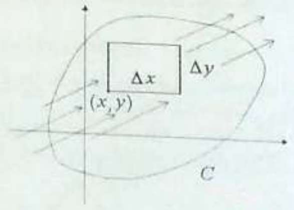


V^x y V^y denotan las componentes de la velocidad V del fluido en (x,y) en las direcciones x e y positivas respectivamente, existe una función Φ, que se llama la *velocidad potencial*, tal que:

$$V^x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad V^y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

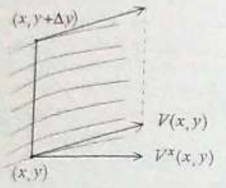
(es lo mismo que decir que (V^x, V^y) es un campo de gradientes).

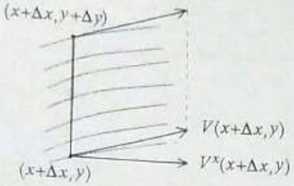
4- El fluido es incompresible, es decir, si C es una curva simple cerrada en el plano (x,y), la cantidad de fluido contenido dentro de C es constante (la cantidad de fluido que entra a C es igual a la cantidad de fluido que sale de C).



5- El fluido es no viscoso, es decir, no tiene viscosidad o fricción interna. Un fluido que es no viscoso e incompresible, se llama *fluido ideal* y es un modelo matemático de un fluido real, en el cual los efectos de viscosidad y fricción interna son despreciables.

Consideremos el rectángulo formado por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ de la figura anterior. Si Δy es chico puedo suponer que V es constante y la cantidad de fluido que pasa a través del segmento formado por (x,y) y $(x, y+\Delta y)$ es el área del paralelogramo que forma este segmento con el vector V. Esta área mide $V^x(x,y)\Delta y$.





Si Δx es chico, la cantidad de fluido que sale por el segmento formado por $(x+\Delta x, y)$ y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ mide $V^x(x+\Delta x, y)\Delta y$. Restando uno a otro, tenemos la razón de pérdida de flujo entre ambos lados:

$$\left(\frac{V^x(x+\Delta x,y)-V^x(x,y)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y \approx \frac{\partial V^x}{\partial x}(x,y)\Delta x\Delta y = \Phi_{xx}(x,y)\Delta x\Delta y \qquad (1)$$

Análogamente, la razón de pérdida de flujo entre los otros dos lados es

$$\left(\frac{V^y(x,y+\Delta y)-V^y(x,y)}{\Delta y}\right)\Delta y\Delta x \approx \frac{\partial V^y}{\partial y}(x,y)\Delta x\Delta y = \Phi_{yy}(x,y)\Delta x\Delta y \qquad (2)$$

Como el flujo sólo entra y sale por estos cuatro lados, entonces sumando (1) y (2) tenemos

$$\Phi_{xx}(x,y) + \Phi_{yy}(x,y) = 0$$

es decir, Φ satisface la ecuación de Laplace.

1.1 El Potencial Complejo

Como la velocidad potencial Φ es una función armónica, e $\text{int}(C)$ es un conjunto simplemente conexo, se deduce que debe existir una función Ψ armónica conjugada de Φ, tal que la función

$$\Omega(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

es holomorfa en C. Esta función Ω, de fundamental importancia en la caracterización de un flujo, se llama *potencial complejo*. Por derivación tenemos

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \Phi_x(x,y) + i\Psi_x(x,y) = \Phi_x(x,y) - i\Phi_y(x,y) = V^x - iV^y$$

Siendo así, la velocidad está dada por

$V(z) = V^x(x,y) + iV^y(x,y) = \overline{\Omega'(z)}$ se llama la *velocidad compleja*, y

$\mathcal{V} = \|V(z)\| = \sqrt{(V^x)^2+(V^y)^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)|$ es la *magnitud* de la velocidad compleja.

1.2 Líneas y Trayectorias Equipotenciales

La familia de curvas $\Phi(x,y) = \alpha$ (α=cte.) (curvas de nivel de Φ) se llaman *curvas equipotenciales*. La familia de curvas $\Psi(x,y) = \beta$ (β=cte.) (curvas de nivel de Ψ) se llaman *curvas de corriente*, o *líneas de corriente*, o *trayectorias*.

Φ se llama *función velocidad potencial*

Ψ se llama *función de corriente*

Obs: Como Φ y Ψ son armónicas conjugadas se tiene que $\nabla\Phi \perp \nabla\Psi$, luego, las curvas equipotenciales y las curvas de corriente son perpendiculares también (allí donde Ω' es conforme, es decir, $\Omega'(z) \neq 0$).

1.3 Fuentes y Sumideros

En todo lo anterior supusimos que no existían puntos en el plano (x,y) en los cuales el fluido aparece o desaparece. Tales puntos se llaman *fuentes* y *sumideros* respectivamente. En tales puntos, que son puntos singulares, la ecuación de Laplace no se cumple. Ninguna dificultad surge al utilizar la teoría anterior siempre que se tenga la precaución de identificar a estos puntos como singularidades en el dominio del potencial complejo $\Omega(z)$ y observar que la ecuación de Laplace vale en una región que excluya a estos puntos singulares.

2 Flujo de Calor

Consideremos un sólido bidimensional que tiene una distribución de temperatura (estacionaria) $\Phi(x,y)$. Interesa la cantidad de calor conducido por unidad de área en unidad de tiempo a través de la superficie. Esta cantidad viene dada por el $\nabla\Phi$:

$F = -k\nabla\Phi$ y se llama *flujo de calor*

k es la constante de conductividad térmica y depende del material del cual está hecho el sólido.

Como Φ es armónica (si $F \in C^2$), si existe Ψ conjugada armónica, tenemos que las curvas

$\Phi = cte.$ se llaman *isotermas* o *líneas isotérmicas*,

$\Psi = cte.$ se llaman *líneas de flujo* y

$\Omega(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$ se llama *temperatura compleja*.

3 Electrostática

3.1 Ley de Coulomb

Sea r la distancia entre dos puntos con carga eléctrica q_1 y q_2. Entonces la fuerza entre ellas está dada en magnitud por la ley de Coulomb, la cual dice que

$$F = \frac{q_1 q_2}{kr^2}$$

y es de repulsión o atracción según que las cargas sean de igual tipo, o diferentes (una positiva y otra negativa). k es una *constante dieléctrica* y depende del medio ambiente (en el vacío k=1).

3.2 Intensidad del Campo Eléctrico. Potencial Electrostático

Supongamos que tenemos una distribución de carga (bidimensional). Esta distribución de carga produce un campo eléctrico. Si una unidad de carga positiva se coloca en un punto a del plano (x, y) (no ocupado por otra carga), la fuerza que actúa sobre esta carga se llama la *intensidad del campo eléctrico* en a y se denota ε. Esta fuerza se deduce de un potencial Φ el cual se llama *potencial electrostático*. En símbolos,

$$\mathcal{E} = -\nabla\Phi$$

entonces

$$\mathcal{E}=E^x+iE^y=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}-i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{donde} \quad E^x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\ E^y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

En una región no ocupada por la carga a, vale (como consecuencia del teorema de Gauss) que

$$\frac{\partial E^x}{\partial x}+\frac{\partial E^y}{\partial y}=0$$

luego

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0$$

es decir, Φ es armónica en todos los puntos no ocupados por carga. Si existe Ψ conjugada armónica de Φ, entonces la función

$$\Omega(z) = \Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

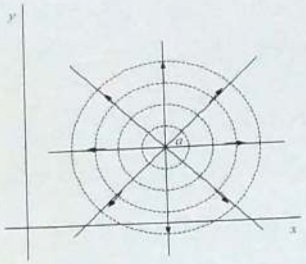
es holomorfa en la región no ocupada por la carga y se llama *potencial complejo electrostático*. En términos de esto, tenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}-i\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Psi}{\partial y}=-\overline{\frac{d\Omega}{dz}}=-\overline{\Omega'(z)}$$

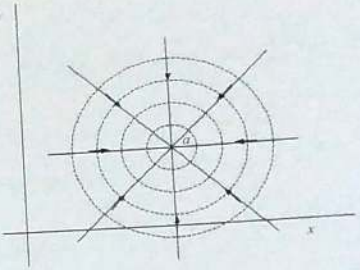
y la magnitud de $\mathcal{E}$ está dada por $E=|\mathcal{E}|=|-\overline{\Omega'(z)}|=|\Omega'(z)|$.
Las curvas $\Phi(x,y)=\alpha$, $\Psi(x,y)=\beta$ se llaman *líneas equipotenciales* y *líneas de flujo* respectivamente.

Se ve entonces que la analogía de flujo de calor y electrostática con flujo de fluidos es muy clara: el campo eléctrico en problemas electrostáticos corresponde al campo de velocidad en los problemas de flujo de fluidos, siendo la única diferencia un cambio de signo en los potenciales complejos correspondientes. Por lo tanto, el potencial complejo electrostático debido a una carga q en un punto $z=a$ (en el vacío) representará una fuente o sumidero según sea que $q<0$ ó $q>0$.

Fuente en $z=a$ $(q<0)$



Sumidero en $z=a$ $(q>0)$



En la primera figura el fluido está brotando con velocidad constante de una fuente en $z=a$, en la segunda, el fluido está desapareciendo en un sumidero $z=a$. En ambos casos las trayectorias se muestran gruesas mientras que las líneas equipotenciales están punteadas.

$\overline{Q}$ conservativo

$\nabla \cdot \overline{Q} = 0$

$\nabla \cdot Q = -\lambda \nabla \cdot \nabla u = -\lambda \Delta u = 0 \Rightarrow$ u es armónica

En un SC tiene arm conj v

$f(z) = u + iv$: es holomorfa

f : temperatura compleja

u = cte : isotermas

v = cte : líneas de campo

$f'(z) = u'_x + i v'_x = u'_x - i u'_y$

$\overline{f'(z)} = u'_x + i u'_y = \nabla u = \dfrac{\overline{Q}}{-\lambda}$

Resumen

$\overline{Q} = -\lambda \nabla u$ flujo de calor

u: temperatura

v: arm conj de u, función de cte

$f(z) = u + iv$ temperatura compleja

$\overline{F'(z)} = \dfrac{\overline{Q}}{-\lambda}$ u = cte líneas isotermas

v = cte " de flujo.

Electroestática

Resumen

u: potencial electroestático

$E = -\nabla u$: campo eléctrico

u armónico

v arm conj

$f(z) = u + iv$ potencial complejo

$\overline{f'(z)} = -E$.

Sucesiones numéricas (reales)

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$; lista infinita de nros reales.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Se dice que la sucesión converge a L si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Esto es: dado $\varepsilon > 0$, $\exists N / n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Se denota:

$a_n \to l$

Si no converge, se dice que diverge

Ej: $a_n = (-1)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge

2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$a_n \to 0$

3) $a_n = r^n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \to 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & r = 1 \\ \nexists & \end{cases}$

$a_n \to 0$ si $|r| < 1$

$a_n \to 1$ si $r = 1$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge si $|r| > 1$ o $r = -1$

4) $a_n = n!$ diverge

5) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

6) $\sqrt[n]{n} \to 1$

7) $\sqrt[n]{r} \to 1$

8) $a_n = \frac{r^n}{n!} \to 0$ para cq r

Series numéricas

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, la serie de términos a_1 es una sucesión.

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$

Se dice que la serie converge si $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$

En tal caso, escribimos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_k$$

Si $\nexists$ límite la serie diverge

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

Ej $a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$

$$S_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

Converge?

$$S_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2k}$$

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}$$

$$k + \textcircled{2}_j \leq k + k = 2k$$

$$\frac{1}{k+\textcircled{2}_j} \geq \frac{1}{2k}$$

$$S_{\textcircled{2}k_j} - S_k \geq \frac{1}{2}$$

$$S_{2k} \geq \frac{1}{2} + S_k$$

$$S_2 \geq \frac{1}{2} + S_1 = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

$$S_4 \geq \frac{1}{2} + S_2 \geq \frac{1}{2} + 3/2 = \frac{4}{2}$$

$$S_8 \geq \frac{1}{2} + S_4 \geq \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = 5/2$$

$$S_{2^k} \geq \frac{1}{2}(k+2)$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{k \to \infty} S_k$

Ej: "La Señora Serie" $\quad S_k = \sum_{n=0}^{k} r^n = 1 + r^1 + r^2 + \cdots + r^k$

serie de términos r^n

existe $\lim_{k \to \infty} S_k$?

$$(1-r) S_k = (1 + r + \cdots + r^k)(1-r)$$
$$= 1 + r + r^2 + \cdots - r - r^2 - \cdots - r^k - r^{k+1} = 1 - r^{k+1}$$

Si $r \neq 1 \quad S_k = \frac{1 - r^{k+1}}{1-r}$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r} \lim_{k \to \infty} r^{k+1} = \frac{1}{1-r}$$

$\downarrow$ si $|r| \leq 1$

Si $|r| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Si $|r| > 1$ o $r = -1$, como $\lim_{k \to \infty} r^{k+1} \nexists$, la serie converge

Si $r = 1$:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} 1^n = 1 + 1^2 + \cdots + 1^k = k+1$$

$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} k+1 \nexists \qquad$ la serie converge sii $|r| < 1$

Se dice que la serie de términos a_n converge abs si converge la serie $\tilde{S}_k = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$

la serie converge condicionalmente si converge pero no converge absolutamente

Proposición

Si la serie de términos a_n converge absolutamente $\Rightarrow$ converge

$\frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{2}$

$dz = ire^{it}$

$z = a + re^{it}$ $0<r<R$

FCG

㉔ $$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|\le R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|\le R} \frac{f(a+re^{it})}{(re^{it})^2}\cdot ire^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi r}\int f(a+re^{it})\,e^{-it}\,dt$$ ✓

㉗ • f(z) es holom en B(0,1) $\quad |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}$

~~no salió~~ x ⇒ $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-0}\,dz = f(0)$$ $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < \frac{2\pi}{1-|z|}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$ ✓

$$|f'(0)| \le M\cdot\frac{2\pi}{2\pi}\cdot R$$

$$M = \left|\frac{f(z)}{z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{|z^2|} = \frac{|f(z)|}{\boxed{|z|}^2} \le \frac{1}{(1-R)\cdot R^2}$$

$|z| = R \le 1$

• $$|f'(z_0)| \le \frac{R}{(1-R)R^2} \quad \forall\, 0<R<1$$

con $R = \frac{1}{2}$ $$|f'(z_0)| \le \frac{1}{(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}} = 4$$

No salió x

㉚ $$\frac{1}{2\pi i}\int_{B(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) = 0$$

re^{it}

$$|f(0)| = \left|\int_{B(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz\right|\frac{1}{2\pi} \le M\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot r = 0$$

$\frac{1}{3!}$ +

㊱ $\phi(x,y)$ es armónica en S ⇒ C^2 en S

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

① • u, v son C^1, son diferenciables

$$\psi = \underbrace{\phi_x}_{u} - i\,\underbrace{\phi_y}_{v}$$ ⇒ ② ver CR para f.

$$\phi_{xx} = u_x = v_y = -\phi_{yy}$$

$$\phi_{xy} = \phi_{yx}$$ → se cumple ya porque $-\phi_y$ es C^1

ϕ_x es C^1 ya que ϕ es C^2

⇒ como se cumplen las condiciones ① y ②
ψ es holomorfa en S ✓

㊴ a) ¿ u, v son armónicas conj ⇒ f es holomorfa?

u y v son armon conj en D
⇒ $u_x = v_y$
$u_y = -v_x$
en D

y u, v son C^2 en D
son armónicas en D

Si f = u + iv
• por CR ⇒ $u_x = v_y$ ✓
$u_y = -v_x$ en D
• siendo u y v C^2 ⇒ son dif en D
en D
⇒ f es holom en D ✓

$, \frac{1}{2}$

¿por qué

b) u armónica en D ⇒ ∃ v función arm conj en D

La parte real e imag. de cualq función holomorfa en D son funciones armónicas y como una función holomorfa verifica las cond de CR en D, necesariamente si u es una función armónica en D, va a cumplir esta última con alguna otra función armónica, o sea, u va a ser localmente la parte real o imag. de la función holom cumpliendo CR con otra función también armónica siendo parte real o imag localmente de la holom.

... ?

(40) $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

$\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$

$$\boxed{v(x,y) = 2xy + e^{2\pi(x-1)}\,\mathrm{sen}(2\pi y)}$$ ✓

$e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$

$$e^{2\pi(z-1)} = e^{2\pi(x+iy-1)} = e^{2\pi(x-1)}\,e^{iy2\pi}$$

$$= e^{2\pi(x-1)}\left(\cos(2\pi y) + i\,\mathrm{sen}(2\pi y)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{2\pi(z-1)}\right) = e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{2\pi(z-1)}\right) = e^{2\pi(x-1)}\,\mathrm{sen}(2\pi y)$$ ✓

→ $u = \mathrm{Re}\left(z^2 + e^{2\pi(z-1)}\right)$ ∇u ⊥ a u = cte

$v = \mathrm{Im}\left(z^2 + e^{2\pi(z-1)}\right)$ ∇v es ⊥ a v = cte

$\nabla u = (u_x, u_y)$ $\nabla v = (v_x, v_y) \underset{CR}{=} (-u_y, u_x)$

$\nabla u \cdot \nabla v = 0$

→ las curvas de nivel de u son ⊥ a las curvas de nivel de v.

$v(\underbrace{1,1}) = 2 + e^{2\pi(1-1)}\,\mathrm{sen}(2\pi\cdot 1) = 2$

donde se chocan ambas curvas

⇒ la curva de nivel ortogonal a la curva C en (1,1) es $\boxed{v(x,y) = 2}$ ✓

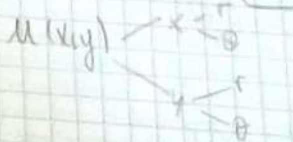
(41) CR en polares:

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \rightarrow \boxed{u_{r\theta} = \frac{1}{r} v_{\theta\theta}}$

$u_\theta = -\frac{1}{r} v_r \rightarrow \boxed{u_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} v_{r\theta}}$

$\boxed{u_{rr} = -\frac{1}{r^2} v_{\theta r}}$

$\boxed{u_{\theta r} = \frac{1}{r^2} v_{rr}}$



$u_x = v_r\,\mathrm{sen}\theta + \frac{v_\theta}{r}\cos\theta$

$v_y = v_r\,\mathrm{sen}\theta + \frac{v_\theta}{r}\cos\theta$

es cos

✗

Razón=

$u_r = u'_x \cdot x'_r + u'_y \cdot y'_r$

$u_{rr} = (u'_{xx} \cdot x'_r + u'_{xy}\,y'_r)\,x'_r + u'_x \cdot x''_{rr}$

(42) $\lambda = 10$ $u(0,0) = 0$

Q $V(0,0) = 0$

$u(x,y)$?

c $V(x,y)$

$\overline{Q} = (-\nabla u \cdot \lambda)$ $\overline{Q} = (3,-4)$

$(3,-4) = -0{,}1\ (u'_x, u'_y)$

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = -0{,}3 \\ u'_y = 0{,}4 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x,y) = -0{,}3\,x + 0{,}4\,y$$

$f(z) = u(x,y) + i\,V(x,y)$

$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z)) = -0{,}3x + 0{,}4y$ $\nearrow$ dato

$-0{,}3\,x = \mathrm{Re}(f_1(z))$ $\mathrm{Re}(f_2(z)) = 0{,}4\,y$

$f_1(z) = -0{,}3\,z$ $f_2(z) = -0{,}4\,i\,z$

$\Rightarrow f(z) = (-0{,}3 - 0{,}4\,i)\,z + di \quad d \in \mathbb{R}$

$V(x,y) = \mathrm{Im}(f(z)) = -0{,}3\,y - 0{,}4\,x + d$

(46) $\overline{E}(x,y) = y + i\,x \rightarrow$ campo eléctrico complejo

$\overline{E}(x,y) = (y,x) = -\nabla u(x,y)$

u pot eléctrico

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = -y \\ u'_y = -x \end{array}\right. \Rightarrow u(x,y) = -xy$$

y $\nabla \cdot E = 0 \Rightarrow$ puede ser campo eléctrico

$\frac{1}{3!}$ +

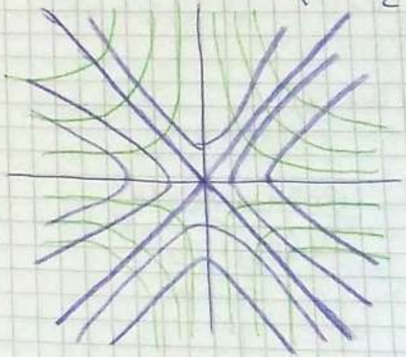
Potencial complejo

$f(z) = u + iV$ $\overline{f'(z)} = E$

$\overline{f'(z)} = E$ $\overline{f'(z)} = (y + ix)$

$f'(z) = y - ix = -iz$

$$f(z) = -i\frac{z^2}{2} = -i\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + i\left(\frac{2xy}{2}\right)\right) + c = \underbrace{xy}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(\frac{y^2 - x^2}{2}\right)}_{V(x,y)}$$



en el otro caso

no es campo eléctrico

$\nabla \cdot E \neq 0$

$\nexists$ f holom.

$\overline{f'(z)} = E$

$\overline{f'(z)} = z$

$f'(z) = \overline{z}$! no.

Fluido ideal

$\overline{v} \parallel (x,y)$

$\overline{v} = (x,y)$ no es ideal $\nabla \cdot \overline{v} \neq 0$

$v(x,y) = g(x,y)\,(x,y)$

$v(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\hat{r}}{|r|^2}$ $D : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Potencial complejo $f(z)$ / $\overline{f'(z)} = \overline{v}$

$$\overline{f'(z)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$f'(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$

$f'(z) = \frac{1}{z}$

$f(z) = \text{Log}\ ~~z~~ + cte = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{pot de velocidad}}}{u(x,y)} + i\,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{función de cte}}}{v(x,y)}$

$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$v(x,y) = \theta = \arg(x+iy)$

<u>líneas equip</u>

$u(x,y) = a$

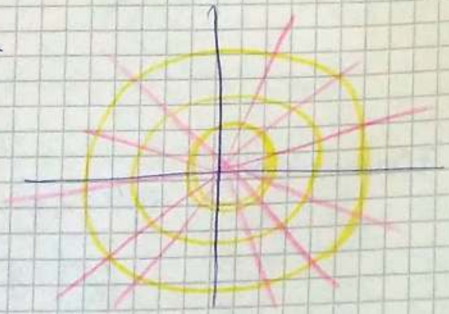
$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = a$

$x^2+y^2 = e^{2a}$

<u>líneas de cte</u>

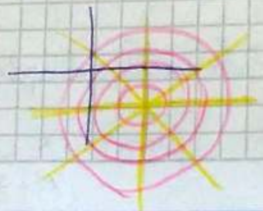
$V(x,y) = b$

$\theta = b$



$\vec{V}(x,y) = \left(\frac{x-3}{(x-3)^2+(y+1)^2}, \frac{y+1}{(x-3)^2+(y+1)^2}\right)$

$\Rightarrow f(z) = \text{Log}\,(z-(3-i))$



1-b) $a_n = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \boxed{a_n \to 0}$

$|a_n| = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \underbrace{\left|\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \to 0$ $n \to \infty$

2) Sucesión compleja

$z_n = x_n + i y_n$ $\quad (x_n), (y_n)$ suc de nºs reales $n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

<u>Resulta</u> $\quad z_n \to a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to a \\ y_n \to b \end{cases}$

2-b) $z_n = \underbrace{\frac{n}{n+3i}}_{\alpha_n} \underbrace{-\frac{in}{n+1}}_{\beta_n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3i} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-in}{n+1} = -i$

$\lim_{n\to\infty} z_n = 1-i$

2-f) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ $\quad |z_n| = \left(\frac{|1+i|}{2}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{<1}^n \to 0$

$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$ sii $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

2-h) $z_n = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$ $\quad z_n = (e^{it})^n$, $t \in \mathbb{R}$ (fijo)

Si $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \to z_n = 1 \to 1$

Si $t \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; no existe $\lim_{n\to\infty} (e^{it})^n$

$\frac{1}{3!} +$

$, \frac{1}{z}$

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n \rightarrow$ conv absolutamente si $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge

$z_n \in \mathbb{C}$

$|z_n|_{n \in \mathbb{N}}$ suc en $\mathbb{R}$

Sea la serie $\sum_{m=0} a_n$

Cond nec conv $\sum_{n=0}^{\infty} a_m$ conv $\Rightarrow a_m \to 0$

Criterios para series de términos $\oplus$

1) Criterios de comparación

Sean $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ / $0 \leq a_n \leq b_n$ si $n \geq m_0$

Entonces

$\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv

($\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div)

2) crit comp por paso al límite

$\sum a_m, \sum b_n, a_m \geq 0, b_n > 0$

/ $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

Entonces:

1) Si $0 < L < \infty$

$\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow \sum b_m$ conv

2) Si $L = 0$

si $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_m$ conv

3) Si $L = \infty$

si $\sum b_n$ div $\Rightarrow \sum a_m$ div.

3) Crit de D'Alembert (cociente

Sea $\sum a_n$, $a_n > 0$

tal que $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_m} = L \Rightarrow$ si $0 \leq L < 1 \Rightarrow \sum a_m$ conv

si $L > 1 \Rightarrow \sum a_m$ div

4) crit de Cauchy (raíz)

Sea $\sum a_m$; $a_m \geq 0$ /

$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_m} = \lim_{n\to\infty} (a_m)^{1/n} = L$

$\Rightarrow$ si $0 \leq L < 1 \Rightarrow \sum a_m$ conv

si $L > 1 \Rightarrow \sum a_m$ div

Nota: Dada $(a_m)_{n \in \mathbb{N}}$

Si $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = L \Rightarrow$

existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_m}$ y además $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_m} = L$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^m \rightarrow$ conv si $|r| < 1$

$\searrow$ div si $|r| \geq 1$

$|r| < 1$: $\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{1}{1-r}$

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow$ conv si $\alpha > 1$

$\searrow$ div si $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$

como $\frac{1}{n^2}$ conv $\underset{c\ comp}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ conv

$0 < \frac{1}{n(n+4)} < \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div

(no cond nec conv)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n} = a_n$

c D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{(n+1\,!)}^{=(n+1)n!}}{100^{n+1}} = \frac{n+1}{100} \to \infty$$

$L = \infty > 1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ div.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ serie conv

$a > 0$

D'A $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0$

como conv → $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0$

7-c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

crit raíz

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ div, además $a_n \to \infty$

8-d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{6^k} = a_n$ Analizo conv de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{6^k}$

$\frac{1}{3!}$ +

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k)^{1/k}}{6} = 1/6 < 1$$

$\Rightarrow \sum |a_k|$ conv

$\Downarrow$

$\sum a_k$ conv

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to a_n$

Analizo conv de: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

no informa sobre conv de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

se hace de otra forma.

invento:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}\,\ln(k+1)}{k^3}}_{a_k}$$

probar que converge

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1} \to a_n$

$\frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

$\downarrow$ n grande

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1}}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\sqrt{n+7}}{n^2-1} = 1$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (conv) $\Rightarrow \sum a_n$ conv

$\frac{1}{2}$

Criterio de Leibnitz (para series alternadas

Sea $a_n \geq 0$ una sucesión monótona decreciente con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

Ej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ Sabemos que no conv absolut

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ monótona dec

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

Como la serie converge pero no conv absolut la serie conv condic.

Criterio de Dirichlet

Sea a_n una suc monótona dec con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n una sucesión con sumas parciales son acotadas (es decir $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} b_n\right| < M$ para algún $M > 0$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge

Ej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $b_n = (-1)^n$

$\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^n\right| = -1+1-1 \cdots \leq 1$

b_n sucesión cuyas sumas parciales son acotados

$a_n = \frac{1}{n}$ monótona dec, $\lim\limits_{n\to\infty}$

$\Rightarrow \sum a_n b_n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Series de nºs complejos

Dada una sucesión $(z_n)_{n=0}$, $z_n \in \mathbb{C}$, la serie de términos z_n es la sucesión de sumas parciales

$S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} z_n$

La serie converge si $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k$

En tal caso denotamos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} z_n$

Proposición

Dada la suc $\boxed{z_n = x_n + i y_n}$

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ converge a $z = x+iy$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = x+iy\right)$

Sii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge a x y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ converge a y

__Proposición__: Dado $(z_m)_{m=0}^{\infty}$ si $\sum_{m=0}^{\infty} |z_m|$ converge

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} z_m$ converge

__Sucesiones y series de funciones__

Sean $f_m : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $f_m : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) funciones en el dominio D

El conjunto $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$ es una sucesión de funciones

Induye serie de funciones

$f_m(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_m(x)$

o $f_m(z) =$ idem

α_m sucesión de funciones

f_m: sucesión de sumas parciales

Para $x = x_0$; se obtiene una sucesión (o serie) numérica.

$f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0)$.

__Ej__ $f_m(x) = x^m$ $x = 1/2$: $f_m(1/2) = (1/2)^m$

$x = 3$ $f_m(3) = 3^m$

$3^1, 3^2, \ldots$

depende del punto donde lo evalúo

__Ej__ $f_m(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m = \sum_{k=0}^{n} x^k$

serie de $\alpha_m(x) = x^n$

Converge?

existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$

$\frac{1}{3!} +$

$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$

Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$

con $f_n : \underset{(o\ \mathbb{C})}{D \subset \mathbb{R}} \to \underset{(o\ \mathbb{C})}{\mathbb{R}}$ el

Dominio de convergencia es

$D_0 = \{ \underset{(z)}{x} \in D \,/\, \exists \lim_{n\to\infty} f_n\underset{(z)}{(x)} \}$

Si $D_0 \neq \emptyset$ se define una función lím

$f : D_0 \to \underset{(o\ \mathbb{C})}{\mathbb{R}}$

$f\underset{(z)}{(x)} = \lim_{n\to\infty} f_n\underset{(z)}{(x)}$

__Ej__: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$

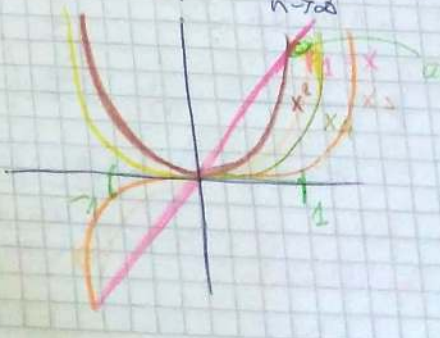
$D = \mathbb{R}$ $D_0 = (-1, 1]$

$f : D_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$x^n \to 0$ si $|x| < 1$

$x^n \to 1$ si $x = 1$

$x^n \to \nexists$ si $x = -1$ o $|x| \geq 1$



$\frac{1}{2}$

Ej: $f_m(x) = \frac{1}{mx}$ $f_m : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$D = (0,\infty)$ $\lim_{n\to\infty} f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mx} = 0 \ \forall x \in D$

$D_0 = D$

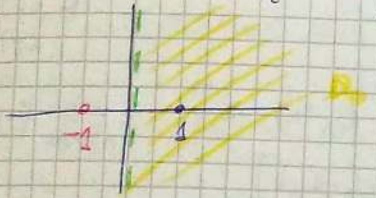
$f : D_0 \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_m(x) = 0 \ \forall x \in D_0$

Ej: $f_m(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k$ $D = \mathbb{C} - \{-1\}$

Para qué z converge? → Si $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$

Si $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 1$, el término $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k$ no tiende a 0 ⇒ serie no converge.

$D_0 = \left\{ z \in D / \left|\frac{z-1}{z+2}\right| < 1 \right\} = \left\{ z \in D / |z-1| < |z+1| \right\}$



$f : D_0 \to \mathbb{C}$

$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_m(z)$

$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k$

$= \frac{1}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{z+1}{2}$

Ej $f_m(x) = \frac{1}{m} \operatorname{sen}(nx)$

$\frac{1}{3!}$ +

$D = \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(mx) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$D_0 = \mathbb{R}$

$g_n(x) = f_m'(x) = \cos(mx)$

$\lim_{n\to\infty} g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(mx) \xrightarrow[x=2k\pi]{} 1$

$\lim g_m(0) = \lim \cos(m \cdot 0) = \lim 1 = 1$

$D_0 = \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Se dice que la sucesión $(f_m)_{n=0}^{\infty}$ converge puntualmente en Do.

Hacia convergencia uniforme $f_n \xrightarrow{\text{punt en } D_0} f$

la menor cota superior

$\boxed{\text{Norma } \infty}$ Dada $f : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ se define $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in D\}$

Dada sucesión $(f_m)_{m=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f en D si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ (es decir $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_m(x) - f(x)|, x \in D\}$)

$\frac{1}{2}$

Notación $f_m \xrightarrow{\text{unif en D}} f$

Consecuencia inmediata

CONVERGE UNIF → CONVERGE PUNTUALMENTE

$f_m \xrightarrow[\text{en D}]{\text{unif}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{puntualmente}} f$

Ej: $f_n(x) = x^n \quad D = (-1, 1]$

$f_n \xrightarrow{\text{punt en } D_0} f \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D_0\}$

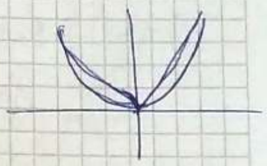
$= \sup\{|x^n - f(x)|, x \in D_0\} = 1 \ \forall n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to 1} 1 = 1 \neq 0$

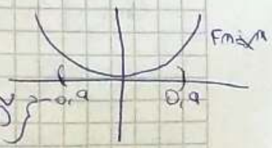
Luego f no conv unif en D_0

$\tilde{D} = (-0{,}9, 0{,}9)$

norma ∞ de $f_n - f$ en $\tilde{D}$



$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) \underbrace{- f(x)}_{=0 \text{ en } \tilde{D}}|, x \in \tilde{D}\}$



$= \sup\{|x^n|, x \in \tilde{D}\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0{,}9^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}9^n = 0$

$\Rightarrow f \xrightarrow{\text{unif en } \tilde{D}} f$

Ej

$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$

$D = \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}$

$= \sup\{|\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx - 0|, x \in D\} = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \xrightarrow{\text{unif en } \mathbb{R}} 0$

Resultados importantes:

- Si $f_n : D \to \underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}}$ son continuas, y $f_n \xrightarrow{\text{unif } D} f \Rightarrow f$ es continua en D
- (en $\mathbb{R}$) f_n integrables en $[a,b]$ y

$f_n \xrightarrow{\text{unif en } [a,b]} f \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

y para series: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx$

$= \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx$

(en $\mathbb{C}$) $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Γ es un contorno en D y

f_n continuas sobre Γ

$f_n \xrightarrow{\text{unif en } D} f$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$

Lamentablemente no hay prop parecida para derivación.

$\boxed{\text{no es cierto}}$: $\underset{\text{en } D}{f_n \text{ derivables}}$ y $f_n \xrightarrow{\text{unif en } D} f$

$\Rightarrow \underset{\text{en } D}{f \text{ es deriv}}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$

Notar que $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(mx) \xrightarrow[\text{unif en } \mathbb{R}]{} 0$

pero $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(mx) \nexists$ si $x \neq 2k\pi$

Criterio de Weierstrass para conv unif de series

Sean $f_m : D \to \mathbb{R} \; (\mathbb{C})$ / $|f_m(x)(z)| \leq M_m \; \forall x \in D$ (z)

y la serie numérica $\sum_{m=0}^{\infty} M_m$ converge

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(z)$ conv unif en D

y $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$ conv absolutamente en D.

Ej $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m^2}$ $\quad f_{xn}(x) = \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m^2}$ $\quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|f_m(x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m^2} \right| \leq \frac{1}{m^2} = M_n \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m^2}$ cunif en $\mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m^2}$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y f es continua

---

(43) $T(x,y) = 2x - 6y$ distribución de temperatura estacionaria

$u(x,y)$ → sólo emos

$\operatorname{Re}(f_1(z)) = 2x$ $\qquad f_1(z) = 2z$

$\operatorname{Re}(f_2(z)) = -6y$ $\qquad f_2(z) = +6iz$

$+6i(x+iy)$ $\qquad \operatorname{Im}(f_2(z)) = 6x$

$\operatorname{Im}(z) = 2y$

$S(x,y) = 2y + 6x$ → curvas de corriente

$\boxed{\mathcal{Z}(z) = 2z + 6iz}$ temperatura compleja

(45) $\overline{V} = \overbrace{\underbrace{V_0 \cos\theta}_{\phi_x = \psi_y}}^{V_1} + i\, \overbrace{\underbrace{V_0 \operatorname{sen}\theta}_{\phi_y = -\psi_x}}^{V_2} = \nabla\phi = \overline{f'(z)}$

campo de velocidad

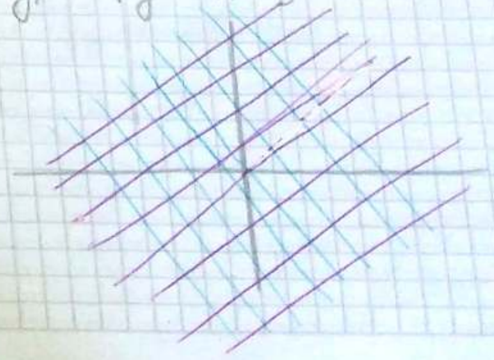
$f'(z) = V_1 - iV_2$

$\Downarrow$

$\Omega(z) = (V_1 - iV_2)z = V_1(x+yi) - iV_2(x+yi)$

$= V_1x + V_2y + i(V_1y - V_2x)$

$\phi(x,y) = V_1x + V_2y$
$\psi(x,y) = V_1y - V_2x$ $\Big\}$ cumple CCR



4ψ

4?) i) $\arg\left(\frac{y}{x+1}\right)$ ~~esta~~

me fijo si la función tiene laplaciano 0:

$$\nabla\psi = \Big(\underbrace{-\frac{y}{x^2-2x+y^2+1}}_{\psi_x}, \underbrace{\frac{x+1}{x^2+2x+y^2+1}}_{\psi_y}\Big)$$

según wolfram da

esta función es la parte imaginaria de esta:

$f(z) = \ln\left|\frac{y}{x+1}\right| + i\arg\left(\frac{y}{x+1}\right)$ una función nombre

---

9-f) $\sum_1^\infty \frac{k}{4k^2-3}$ $\quad a_k \to 0$

$a_k = \frac{k}{k^2(4-3/k^2)} \sim \frac{k}{4k^2} = \frac{1}{4k}$

comparo por paso lím con

$\sum_1^\infty \frac{1}{k}$. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{4k^2-3} = \frac{1}{4}$

$\downarrow$ diverge $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ div

9-g) $a_k = \frac{1}{k^3-k+2} \sim \frac{1}{k^3}$

9-e) $a_k = \frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2} \neq 0$

$\sum a_k$ div

8-b) $\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{1}{3^k}$ $\to$ serie alternada (no es de términos ⊕)

1°) sup analizo conv

$a_k \to 0 \Leftrightarrow |a_k| \to 0$

$\sum_0^\infty r^k \xrightarrow{} $ conv si $|r|<1$
$\to$ div si $|r|\geq 1$

$\sum_1^\infty \frac{1}{k^\alpha} \to$ conv si $\alpha>1$
$\to$ div si $\alpha\leq 1$
$\alpha \in \mathbb{R}$

$\sum_1^\infty \frac{1}{3^k} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$r = \frac{1}{3}$. $|r|<1$

$\to$ S conv

$\Rightarrow \sum_1^\infty (-1)^k \frac{1}{3^k}$

conv absolut

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

8 - c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ → serie alternada

1° ¿conv abs?

Analizo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ → div

→ no conv abs

Crit de Leibniz

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) $1/\sqrt{k} \to 0$

2) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ decreciente

$a_{k+1} \leq a_k$

$k+1 > k > 0$

$\Rightarrow \sqrt{k+1} > \sqrt{k} > 0$ $\qquad a_{k+1} < a_k$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\qquad \therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{1/2}}$ conv condic.

10 - h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

10. Analizar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series complejas. Si es posible, calcular a qué converge.

1°) ¿conv abs?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ conv abs

10 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ $\qquad |i^n| = |i|^n = 1^n = 1$

1) conv abs

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ ↔ ~~(c)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

comparar = [illegible]

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i^n}{5+in^2}$ $\qquad$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(\frac{n\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\frac{n\pi}{5})\right)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ $\qquad$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ $\qquad (\theta \in [0, 2\pi))$

2) Crit de Dirichlet

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $a_n \in \mathbb{R} \geq 0$, $b_n \in \mathbb{C}$

/ 1) $(a_n)_{n \geq n_0}$ monótona decrec. y $a_n \to 0$

2) $\left| \sum_{n=1}^{K} b_n \right| \leq M$ no depende de M (cant de térm)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{K} a_n b_n$ conv

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - i2^n}{3^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{5^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot i^n$ $\qquad$ ① $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ $(a_n)_{n \geq 1}$ decrece

② $\sum_{n=1}^{K} i^n = \sum_{n=0}^{K} i^n - 1 = \frac{1 - i^{K+1}}{1-i} - 1$

$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} N & \text{si } r = 1 \\ \frac{1-r^N}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$

$= \frac{1 - i^{K+1} - 1 + i}{1-i}$

$= \frac{i(1 - i^K)}{1-i}$

$\left| \sum_{n=1}^{K} i^n \right| = \left| \frac{i(1-i^K)}{1-i} \right| = \frac{|i|\,|1-i^K|}{|1-i|} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$

$|1 - i^K| \leq 1 + |i^K| \leq 1 + 1 = 2$

$\therefore$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ conv condic

En esta tamb se puede separar en parte real e im.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4}$ → $\sum$ cosas $+ i \sum$ cosas

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$$ conv abs ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ div}$$

1) $0 < a_n = 1/\sqrt{n} \to 0$ a_n decrece

2) $b_n = e^{in\theta}$

$$\sum_{n=1}^{M} e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{M} (e^{i\theta})^n = \sum_{k=0}^{M+1} (e^{i\theta})^{k+1}$$

$$= e^{i\theta} \sum_{k=0}^{M-1} (e^{in\theta})^k = \begin{cases} e^{i\theta} \cdot M & \text{si } e^{i\theta} = 1 \\ e^{i\theta} \dfrac{1-(e^{i\theta})^M}{1-e^{i\theta}} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1 \end{cases}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{M} e^{in\theta}\right| \leq \frac{|e^{i\theta}| (1+|e^{i\theta}|^M}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$ no dep de M ∴ S conv cond

$$z_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} = \frac{\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{n}}$$

$$= \underbrace{\frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}}_{\alpha_n} + \underbrace{\frac{i \operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{n}}}_{\beta_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$$

prob que es conv $\sum_{n=1} z^n = A + iB$

4ΔPa $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}} ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{n}}$$

$\circ$ $\sum \frac{i^n}{n} = \sum \operatorname{Re}\left(\frac{i^n}{n}\right) + i \sum \operatorname{Im}\left(\frac{i^n}{n}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$, $z \in \Omega$

a) $f_n(z) = \frac{1}{n} e^{-n|z|}$ $\Omega = \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{-n|z|} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$f_n(z) \xrightarrow[\mathbb{C}]{\text{punt en}} 0$$

Con unif en Ω?

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(z) - f(z)|, z \in \Omega\}$$
$$= \sup\{|\tfrac{1}{n} e^{-n|z|} - 0|, z \in \Omega\}$$
$$= \sup\{\tfrac{1}{n} e^{-n|z|}, z \in \mathbb{C}\}$$ $\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = 1/n$

Como $|z| \geq 0$
$-n|z| \leq 0$
$e^{-n|z|} \leq 1$

$\frac{1}{n} e^{-n|z|} \leq \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{C}]{\text{unif en}} f = 0$$

c) $f_n(z) = e^{-n^2 z}$ $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq r\}, r > 0$
$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 z}$$

$\frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{z}$

Veamos $\lim_{n\to\infty} \left| e^{-n^2 z} \right| = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 x} = 0$

$\downarrow$ $x = \mathrm{Re}\, z$

Luego $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2 z} = 0 = f(z)$, $z \in \Omega$

$$f_n \xrightarrow{\text{punt en } \Omega} 0$$

Similarmente $f_n \xrightarrow{\text{punt en } \Omega_1} 0$

conv unif en Ω

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{ |f_n(z) - 0|, z \in \Omega \}$

$= \sup\{ |e^{-n^2 z}|, \mathrm{Re}\, z \geq r \}$

$= \sup\{ e^{-n^2 x}, x \geq r \}$

$= e^{-n^2 r}$

$x \geq r$

$n^2 x \geq n^2 r$

$-n^2 x \leq -n^2 r$

$e^{-n^2 x} \leq e^{-n^2 r}$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 r} = 0$

Luego $f_n \xrightarrow{\text{unif en } \Omega} 0$

conv unif en Ω_1?

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{ |f_n(z) - f(z)|, z \in \Omega_1 \}$

$= \sup\{ e^{-n^2 x}, x > 0 \} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ f_n no conv unif a f en Ω_1

---

15. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ converge absoluta y uniformemente en $\mathrm{Im}\, z \leq -r$ $(r > 0)$. Determinar a qué función converge la serie anterior y deducir a qué converge $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-inz}$, $\forall z : \mathrm{Im}\, z < 0$.

15) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ CA CU en $\Omega = \{ z / \mathrm{Im}\, z \leq -r \}$ $r > 0$

CA

$\sum_0^\infty |e^{-inz}| = \sum_0^\infty \left| e^{-in(x+iy)} \right| = \sum_0^\infty \left| e^{ny - inx} \right|$

$= \sum_0^\infty e^{ny} = \sum_0^\infty (e^y)^n = \sum_0^\infty a^n$ conv porque $|a| = |e^y| = e^y < 1$

porque $y < 0$ en Ω

$\Rightarrow \sum e^{inz}$ CA en Ω

CU en Ω

Crit de Weistrass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, $z \in \Omega$

- $|f_n(z)| \leq M_n$ $\forall z \in \Omega$
- $\sum_0^\infty M_n$ conv

$\Big\}$ $\sum f_n(z)$ CU en Ω

Veamos $|f_n(z)| = |e^{-inz}| = e^{ny} \leq \boxed{e^{-nr}} M_n$

en Ω: $y \leq -r$

$ny \leq -nr \to e^{ny} \leq e^{-nr}$

$\sum_0^\infty M_n = \sum_0^\infty e^{-nr} = \sum_0^\infty (e^{-r})^n$ conv porque $|e^{-r}| < 1$

$\Rightarrow$ por Crit de W. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ conv unif en Ω

$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-iz})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-iz}}$

$\downarrow$ $a = e^{-iz}$ $|a| = e^y < 1$ en Ω

$\frac{1}{3!} +$

$, \frac{1}{z}$

Veamos $\lim_{n\to\infty} \left| e^{-n^2 z} \right| = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 x} = 0$

$\downarrow$ $x = \mathrm{Re}\, z$

Luego $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2 z} = 0 = f(z) ,\ z \in \Omega$

$f_n \xrightarrow{\text{punt en } \Omega} 0$

Similarmente $f_n \xrightarrow{\text{punt en } \Omega_1} 0$

Conv unif en Ω

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{ |f_n(z) - 0| ,\ z \in \Omega \right\}$

$= \sup\left\{ |e^{-n^2 z}| ,\ \mathrm{Re}\, z \geq r \right\}$

$= \sup\left\{ e^{-n^2 x} ,\ x \geq r \right\}$

$= e^{-n^2 r}$

$x \geq r$

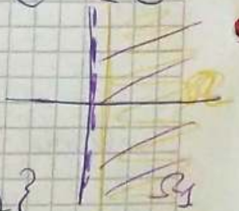
$n^2 x \geq n^2 r$

$-n^2 x \leq -n^2 r$

$e^{-n^2 x} \leq e^{-n^2 r}$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 r} = 0$

Luego $f_n \xrightarrow{\text{unif en } \Omega} 0$



Conv unif en Ω_1?

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{ |f_n(z) - f(z)| ,\ z \in \Omega_1 \right\}$

$= \sup\left\{ e^{-n^2 x} ,\ x > 0 \right\} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ f_n no conv unif a f en Ω_1

---

15. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ converge absoluta y uniformemente en $\mathrm{Im}\, z \leq -r\ (r > 0)$. Determinar a qué función converge la serie anterior y deducir a qué converge $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-inz}$, $\forall z : \mathrm{Im}\, z < 0$.

15) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ CA, CU en $\Omega = \{ z / \mathrm{Im}\, z \leq -r \}$ $r > 0$

CA

$\sum_0^\infty |e^{-inz}| = \sum_0^\infty \left| e^{-in(x+iy)} \right| = \sum_0^\infty \left| e^{ny - inx} \right|$

$= \sum_0^\infty e^{ny} = \sum_0^\infty (e^y)^n = \sum_0^\infty a^n$ conv porque $|a| = |e^y| = e^y < 1$ porque $y < 0$ en Ω

$\Rightarrow \sum e^{inz}$ CA en Ω

CU en Ω $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) ,\ z \in \Omega$

Crit de Weistrass

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ |f_n(z)| \leq M_n \ \forall z \in \Omega \\ \cdot\ \sum_0^\infty M_n \text{ conv} \end{array}\right\} \sum f_n(z) \text{ CU en } \Omega$$

Veamos $|f_n(z)| = |e^{-inz}| = e^{ny} \leq \boxed{e^{-nr}}\ M_n$

en Ω: $y \leq -r$

$ny \leq -nr \rightarrow e^{ny} \leq e^{-nr}$

$\sum_0^\infty M_n = \sum_0^\infty e^{-nr} = \sum_0^\infty (e^{-r})^n$ conv porque $|e^{-r}| < 1$

$\Rightarrow$ por Crit de W. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ conv unif en Ω

$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-iz})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-iz}}$

$\downarrow$ $a = e^{-iz}$ $|a| = e^y < 1$ en Ω

$\frac{1}{3!}$

$\frac{1}{z}$

Series de potencias

Es una sucesión de polinomios:

$P_0(z) = C_0$

$P_1(z) = C_0 + C_1(z - z_0)$

$\vdots$

$P_n(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n$

z_0: centro de la serie de potencias

$c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, "coef de la serie"

En $z = z_1$, $P_0(z_1), P_1(z_1), \dots, P_n(z_1) \rightarrow$ sucesión de nºs complejos.

La serie converge puntualmente en z_1 si existe $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(z_1)$

En tal caso se denota: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(z_1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$

Dominio de convergencias:

$D_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;/\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n(z) \right\}$

Si $D_0 \neq 0$ queda definida la función límite de la serie

$f: D_0 \to \mathbb{C} \;/\; f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$

Entonces, puede ocurrir Δ — Teo Cauchy Hadamard - Abel: Sea D_0 el dom de conv de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$

1) $D_0 = \{z_0\}$

2) $B(z_0, R) \subset D_0 \subset \overline{B}(z_0, R)$ ← bola y borde

3) $D_0 = \mathbb{C}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|C_{k+1}(z-z_0)^{k+1}|}{|C_k(z-z_0)^k|}$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|C_{k+1}|}{|C_k|} \cdot |z-z_0| = L$

$|z-z_0| \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = L \underset{\text{para que conv}}{<} 1$

$|z-z_0| < \dfrac{1}{\lim \dfrac{|C_{k+1}|}{|C_k|}}$

En el caso 2, R = radio de convergencia.

En el caso 1 se dice que el radio de conv es 0 y caso 3, radio de conv es ∞.

Además

- Si $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = L \Rightarrow R = 1/L$
- Si $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = L \Rightarrow R = \dfrac{1}{L}$ (Vale tmb si $L = \infty \Rightarrow R = 0$, y si $L = 0$, $R = \infty$)

Además: las series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, C_k(z-z_0)^k$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ tienen el mismo radio de conv

Ej: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\,(z-1)^k$ coef $C_k = k!$, $z_0 = 1$

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)!}{k!} = \lim\limits_{k\to\infty} k+1 =$

$L = \infty \Rightarrow R = 0 \quad D_0 = \{1\}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ $C_k = 1/k^2$ $z_0 = 0$

$\lim_{k\to\infty} \frac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^2} k^2 = 1 = L \Rightarrow R = 1$

$B(0,1) \subset D_0$

$\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \subset D_0 \subset \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$

Converge en la frontera? $|z| = 1$

converge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ si $|z| = 1$?

Veamos CA

$\sum \left|\frac{z^k}{k^2}\right| = \sum \frac{|z|^k}{k^2} = \sum \frac{1}{k^2}$ conv

$\Rightarrow \sum \frac{z^k}{k^2}$ conv abs si $|z| = 1$

$\Downarrow$

conv si $|z| = 1$

$\Rightarrow D_0 = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+i)^k$ $C_k = \frac{1}{k!}$ $z_0 = -i$

$\lim_{k\to\infty} \frac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)!} k! = 0$

$\Rightarrow R = $ "∞" $D_0 = \mathbb{C}$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ $C_k = 1$ $z_0 = 0$

$\lim_{k\to\infty} \frac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

$\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \subset D_0 \subset \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$

Si $|z| = 1$, $z^k \not\to 0 \Rightarrow$ serie diverge

$D_0 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$

Converge a $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

Máquina de sumar series

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-(z-z_0))^k = \frac{1}{1-(-(z-z_0))} = \frac{1}{1+(z-z_0)}$

  $\downarrow$ $|z-z_0| < 1$

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k = \frac{1}{1-z^2}$

  $\downarrow$ $|z^2| < 1$

- $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{z^2+i}\right)^k}_{\text{no es serie de potencias}} = \frac{1}{1-\frac{1-z}{z^2+i}}$

  $\downarrow$ Si $\left|\frac{1-z}{z^2+i}\right| < 1$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (\cos(x))^k = \frac{1}{1-\cos x}$

  $\downarrow$ Si $\cos(x) \neq \pm 1$

Teorema

- La serie de potencias $\sum C_k (z-z_0)^k$ CU en $\{z / |z - z_0| < r\}$ con $r < R$ (R: radio de convergencia)

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{z}$

* converge absolutamente en $\{z\in\mathbb{C} / |z-z_0|<R\}$

- Sea $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, $z\in\{z\in\mathbb{C} / |z-z_0|<R\}$

función suma de la serie

es holomorfa en el dominio de conv

Entonces la serie se puede derivar e integrar t.a.t:

$$* \quad f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot k\cdot(z-z_0)^{k-1} \quad , z\in\{z\in\mathbb{C}/ |z-z_0|<R\}$$

$$* \quad F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}+d$$

Se verifica: $F'(z)=f(z)$, $z\in\{z\in\mathbb{C} / |z-z_0|<R\}$

El teo dice una serie de potencias es holom dentro de su dom de conv.

$$f(z_0)=c_0 \qquad f'(z_0)=c_1$$

$$f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} c_k\,(k(k-1))(z-z_0)^{k-2} \qquad f''(z_0)=c_2\cdot 2!$$

$$f'''(z)=\sum_{k=3}^{\infty} c_k\,k(k-1)(k-2)(z-z_0)^{k-3} \quad f'''(z_0)=c_3\cdot 3!$$

$$\vdots$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=c_n\cdot n!}$$

Funciones analíticas

f es analítica en un dominio D si para cada $z_0 \in D$ existen coef $c_1, c_2, \dots, c_k$, y un $R>0$ /

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad \forall\, \cancel{z} / |z-z_0|<R$$

Si f es analítica ⇒ f es holomorfa

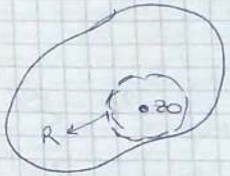
" " " holomorfa ⇒ f " analítica

Teorema de Taylor

Sea f holomorfa en dom abierto D ⇒ f es desarrollable en serie de potencias con centro en z_0 $\forall z_0 \in D$

Es decir, dado z_0, $\exists R>0$ /

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \text{ con } c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$



¿Cuál es R? De la demostración surge que R puede ser tan grande como se desee mientras f holom en $\{z\in\mathbb{C} / |z-z_0|<R\}$

Ej: 1) $f(z)=e^z$ holo en $\mathbb{C}$

$z_0=0$

$f(0)=1$

$f'(0)=1$

$f^{(k)}(0)=1$

$c_0=\frac{f(0)}{0!}=1$

$\vdots$

$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$

Serie $\underbrace{f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k}_{\forall z\in\mathbb{C}}=e^z \quad R=\infty$

2) $f(z)\ e^z$

$z_0=z_0$

$f(z_0)=e^{z_0}$

$f'(z_0)=e^{z_0}$

$f^{(k)}(z_0)=e^{z_0}$

$c_1=\frac{e^{z_0}}{1}$

$\vdots$

$c_k=\frac{e^{z_0}}{k!}$

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty} e^{z_0}(z-z_0)^k \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

3) $f(z) = \text{sen } z \rightarrow$ holo en $\mathbb{C}$

$z_0 = 0$

$f(0) = 0$ $\quad c_0 = 0$

$f'(0) = \cos(0) = 1$ $\quad c_1 = \frac{1}{1!} = 1$ $\quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(-1)^j}{k!} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$

$f''(0) = -\text{sen}(0) = 0$ $\quad c_2 = 0$

$f'''(0) = -\cos 0 = -1$ $\quad c_3 = \frac{-1}{3!}$ $\quad k = 2j+1 \quad j \in \mathbb{N}_0$

Serie:

$$f(z) = \text{sen } z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$z_0 = 0$

Derivamos t a t la serie de seno:

$$(\text{sen } z)' = \cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} (2j+1) z^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}$$

para $z \in \mathbb{C}$

5) $f(z) = i z^3 + 3 z^2 - 2 - i$

f es holo en $\mathbb{C}$

$z_0 = 0$

serie: $f(0) = -2-i$ $\quad c_0 = -2-i$

$f'(0) = 3iz^2 + 6z \Big|_{z=0} = 0$ $\quad c_1 = 0$

$f''(0) = 6iz + 6 \Big|_0 = 6$ $\quad c_2 = \frac{6}{2!} = 3$

$f'''(0) = 6i$ $\quad c_3 = \frac{6i}{3!} = i$

$f^k(0) = 0 \quad k \geq 4$

$a_k = 0, \ k \geq 4$

$$f(z) = (-2-i)(z-z_0)^0 + 3(z-z_0)^2 + i(z-z_0)^3$$
$$= -2 - i + 3z^2 + iz^3$$

da lo mismo porque ya es una serie de potencias en 0.

$z_0 = 1$

$f(1) = 1$ $\quad f''(1) = 6+6i$ $\quad f^k(1) = 0, \ k \geq 4$

$f'(1) = 6+3i$ $\quad f'''(1) = 6i$

$c_0 = \frac{1}{0!} = 1$, $c_1 = \frac{6+3i}{1!} = 6+3i$, $c_2 = \frac{6+6i}{2!} = 3+3i$

$c_3 = \frac{6i}{3!} = i$

$$f(z) = 1(z-1)^0 + (6+3i)(z-1) + (3+3i)(z-1)^2 + i(z-1)^3$$

A qué convergen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} = \text{sen } 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} = e^{i} = \cos(1) + i\,\text{sen}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}\right) = 2$$

$$\underset{|z|<1}{\sum z^k} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum k z^{k-1} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$\frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{z}$

Sucesiones y Series Numéricas.

1. Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones reales:

(a) $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ (b) $a_n = (-1)^n \frac{5}{n}$ (c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(d) $a_n = \frac{n^2}{2}$ (e) $a_n = \frac{\operatorname{sen}(2n)}{n}$ (f) $a_n = \frac{\sqrt{n^3}+2}{n^2-2}$

(g) $a_n = \frac{n!}{(n+1)!}$ (h) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (i) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a \geqslant b \geqslant 0$

(j) $a_n = \cos(n\pi)$ (k) $a_n = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ (l) $a_n = \frac{n^k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \Rightarrow a_n (C)$ b) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n 5}{n}}_{\text{acotada} \cdot 0} = 0 \Rightarrow a_n (C)$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow a_n (D)$ c) $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/2} - (n)^{1/2} =$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 \Rightarrow a_n (C)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^{1/2} - n^{1/2})((n+1)^{1/2} + n^{1/2})}{(n+1)^{1/2} + n^{1/2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{1/2} + n^{1/2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2} + n^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow a_n (C)$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n)}{n} = 0 \Rightarrow a_n (C)$

acotada

$\infty \cdot 0$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}+2}{(n^2-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^{3/2}+2)(n^{3/2}-2)}{n^2-2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-4}{n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n - 4/n^2)}{n^2(1-2/n^2)}$ $\to \infty$ $\to 1$

$= \infty \Rightarrow a_n (D)$

k) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{acot}} = 0$

h) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{(1+1/n)}_{\to 1}}$

Si dos subsucesiones tienden a 2 valores ≠ ⇒ ∄ límite.

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ par}}} \frac{(-1)^n}{(1+1/n)} = 1$

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ impar}}} \frac{(-1)^n}{(1+1/n)} = -1$

a_n (D)

i) $\lim_{n\to\infty} (\underbrace{a^n}_{\to\infty} + \underbrace{b^n}_{\to\infty})^{1/2} = \infty \Rightarrow a_n (D)$ $\to \infty$ $\to \infty$

j) $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow a_n (D)$

---

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ porque $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ converge por DA

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^k} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}_{\to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

por Cond. nec. para la conv. de una serie

$\Rightarrow \sum a_n$ converge

$\frac{1}{3!}$

2. Hallar, si existe, el límite de las siguientes sucesiones de números complejos:

(a) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\,r$, $r \in \mathbb{R}$ (b) $z_n = \frac{n}{n+i3} - \frac{i\,n}{n+1}$

(c) $z_n = \frac{1+2n^2}{n^2} - i\frac{n-1}{n}$ (d) $z_n = i^n$

(e) $z_n = n\,i^n$ (f) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

(g) $z_n = \operatorname{sen}(n\,i)$ (h) $z_n = (\cos t + i \operatorname{sen} t)^n$, $t \in \mathbb{R}$

h) $\lim_{n\to\infty} (e^{it})^n \begin{cases} 1 & t = 2k\pi \\ \nexists & \text{e.o.c} \end{cases}$

no existe lím ∀ t ∈ ℝ

a) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}$ $\lim_{n\to\infty} r^n$ $\to 0$ $|r| < 1$; $\to 1$ $r = 1$; $\to\infty$ e.o.c $\Big\}$ $\lim_{n\to\infty} z_n \nexists$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+i3} - \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+i3/n)} = 1$

$\lim_{n\to\infty} -i\frac{n}{n+1} = -i$

$\to 1$ ambos

$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 - i$

c) $\lim_{n\to\infty} z_n = 2 - i$ d) $\lim_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} -i & n = \{3, 7, 11, 15, \ldots\} \\ 1 & n = \{0, 4, 8, 12, \ldots\} \\ -1 & n = \{2, 6, 10, 14, \ldots\} \\ i & n = \{1, 5, 9, 13, \ldots\} \end{cases}$

e) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot i^n \nexists$ además por (d), producto de límites. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n \nexists$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$ porque veo que $|z_n| = \left|\frac{1+i}{2}\right|^n = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|^n$

$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|^n = 0$

g) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(ni) = \lim_{n\to\infty} i \underbrace{\operatorname{sh}(n)}_{\to\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n \nexists$

3. Encontrar dos subsucesiones convergentes de cada una de las sucesiones:

(a) $\{e^{n\pi i/3}\}$ (b) $\{i^{2n}\}$

4. Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión convergente. Probar que:

(i) $\{z_n\}$ es una sucesión acotada,
(ii) $\{|z_n|\}$ es una sucesión convergente.

En ambos casos, dar un contraejemplo de la recíproca.

conv ⇒ acot
acot ⇒ conv es falso

③ a) $\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}$ [illegible] converge a 1 con $n = \{6K, K \in \mathbb{N}\}$
y a $\{0 \cup -6K, K \in \mathbb{N}\}$

$2 = \frac{\pi K}{3} = \frac{K}{6} n$

$6k = n$

b) $i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$ $\lim_{n\to\infty} (-1)^m$ converge a 1 con m par
y a -1 con m impar

④ i) $\{z_n\}$ convergente ⇒ $\{z_n\}$ acotada

$\{z_n\}$ converge a z
⇔ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ m \in \mathbb{N} / n \geq m$
⇒ $|z_n - z| < \varepsilon$

y si $n \geq m$

des triang.

$|z_n| = |z_n - z + z| \leq |z_n - z| + |z|$
$\leq \varepsilon + |z|$

Además $\{|z_n| / n \leq m\}$ es un conj finito no vacío que alcanzará máximo en un z_M

$\lim z_n = z \Rightarrow \lim |z_n| = |z|$

⇒ $|z_n| \leq \varepsilon - |z| + z_M$ ⇒ $\{z_n\}$ está acotada.

ii) Falta

$|z_n|$ conv pero z_n diverg $z_n = e^{in\theta}$ $\theta \neq 2k\pi$

5. Analizar la convergencia de las siguientes series reales utilizando el criterio de comparación:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\,k}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos(k)}{k}$

6. Analizar la convergencia de las siguientes series reales mediante el criterio de D'Alembert:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k\,2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{100^k}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{3^k}$ (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$

7. Analizar la convergencia de las siguientes series reales mediante el criterio de Cauchy:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{10^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k^2}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^k}{k}$

⑤ a) $\frac{1}{k} < \frac{2}{k}$

como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K}$ diverge

⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{K}$ diverge

b) $\frac{1}{k^2+k} < \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ converge

⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ conv

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^K}$ converge ⇒

$\frac{1}{1+2^k} < \frac{1}{2K}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2K+1}$ converge

d) $\frac{2+\cos(k)}{k} < \frac{K(2+\cos(K))}{K}$

$\frac{2+\cos(K)}{K} < 2+\cos(K)$

$\sum_{i=0}^{\infty} 2+\cos(K)$ ⇒ diverge

$\lim_{K\to\infty} \cos(K) \nexists$ depende del k

suma 2 infinitas veces

$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2+\cos(K)}{K}$ diverge

⑥ a) $\lim_{K\to\infty} \frac{3^{K+1}}{(K+1)\,2^{K+1}} \cdot \frac{K\,2^K}{3^K}$

$= \lim_{K\to\infty} \frac{3}{2K} = 0 \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{3^K}{K\,2^K}$ (C)

b) $\lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)!}{K!} \cdot \frac{100^{K+1}}{100^K} = \lim_{K\to\infty} K\,100 = \infty$

$\Rightarrow \sum \frac{K!}{100^K}$ (D)

c) $\lim_{K\to\infty} \frac{4(K+1)+1}{3^{K+1}} \cdot \frac{3^K}{4K+1}$

$= \lim_{K\to\infty} \frac{4K+5}{4K+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum$ (C)

d) $\lim_{K\to\infty} \frac{5^{K+1}}{(K+2)!} \cdot \frac{(K+1)!}{5^K} = \lim_{K\to\infty} 5/(K+2) = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ (C)

⑦ a) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[K]{\frac{2^{K+1}}{K^K}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[K]{2} \cdot 2}{K}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{K} = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ (C)

b) $\lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{\frac{K^K}{10^K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{K}{10} \nexists \Rightarrow \sum a_n$ (D)

c) $\lim_{K\to\infty} \left(\frac{1+K}{K}\right)^{K^2 \cdot \frac{1}{K}} = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{1+K}{K}\right)^K$

$= \lim_{K\to\infty} \left(1+\frac{1}{K}\right)^K = e > 1 \Rightarrow \sum a_n$ (D)

d) $\lim_{K\to\infty} \left(\frac{(2K-1)^K}{K}\right)^{1/K}$

$= \lim_{K\to\infty} \frac{2K-1}{(K)^{1/K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{2K-1}{\sqrt[K]{K}}$

$\Rightarrow \sum a_n$ (D)

$\frac{1}{3!}$

$\frac{1}{2}$

8. Determinar el carácter de las siguientes series reales alternadas:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+3}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{3^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{6^k}$

a) $\{a_k\} = \frac{1}{2k+3}$ es decreciente con límite 0 $b_k = (-1)^k$

$|\sum b_k| \leq 1$

$\Rightarrow \sum a_k b_k$ converge

crit de Dirichlet (vale también en part para $\mathbb{R}$) ambos

b) $\{a_k\} = \frac{1}{3^k}$ es decreciente con límite 0

$\Rightarrow \sum (-1)^{k-1} a_k$ (C)

crit de Leibniz

c) $\{a_k\} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ es decreciente con límite 0

$b_k = \cos(k\pi)$ / $|\sum b_k| \leq 1$ $\Rightarrow \sum a_k b_k$ (C)

crit de Dirichlet

d) $\{a_k\} = \frac{k}{6^k}$ es decreciente con límite 0 (crece + rápido 6^k que k)

demostración: ejercicio (11)

$\{b_k\} = (-1)^k$ / $|\sum b_k| \leq 1 \Rightarrow \sum a_k b_k$ (C)

crit de Dirichlet

9. Analizar cuáles de las siguientes series reales son absolutamente convergentes, cuáles condicionalmente convergentes y cuáles divergentes. En los casos convergentes en que sea posible, calcular a qué converge.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}2^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[k]{k_0}}{2}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-3}$

a) $\left.\begin{matrix}\sum |2^k| (D) \\ \sum 2^k (D)\end{matrix}\right\} D$

b) $\sum \left|\frac{5}{3}\frac{3}{5}^k\right| = \frac{5}{3}\sum\left|\frac{3}{5}\right|^k = \frac{5}{3}\underbrace{\frac{1}{1-3/5}}_{5/2} = \frac{15}{6} \Rightarrow \sum|a_n|$ (C)

$\Rightarrow \sum a_n$ conv abs

$\Rightarrow \sum a_n$ conv y a $\frac{15}{6}$ (en este caso)

c) $2k+3 > 2k+1$

$\frac{1}{2k+3} < \frac{1}{2k+1}$

$0 < \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}}_{\text{límite es 0 por sandwich}} < \frac{1}{2k}$

límite es 0

límite da 0

$\Rightarrow$ puede llegar a converger

$\sum (k+1 - k)$

¿A qué converge? ¿converge absolutamente?

$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} = \frac{2k+3-2k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2}{4k^2+6k+4}$

$= \frac{1}{2k^2+4k+2}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2k^2+4k+2}\right| = 0 \Rightarrow \sum|a_k|$ (C) $\Rightarrow \sum a_k$ (CA)

$\Rightarrow \sum a_k$ (C)

Veo que: $\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{9}}_{k=3} \cdots$ es una serie telescópica, esta serie es convergente por definición y converge a su 1° valor.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{3}$ $S_N = \sum_{k=1}^{N} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2N+3}$

$\frac{1}{3!}$

d) $|a_k| = \left|(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\right| \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2}{3}\right|^k = 0$

$2/3 < 1$

$\Rightarrow \sum|a_k|$ (C) $\Rightarrow \sum a_k$ (CA) $\Rightarrow \sum a_k$ (C)

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-2/3)} - 1 = \frac{1}{5/3} - 1 = \frac{3}{5} - \frac{5}{5} = \boxed{-\frac{2}{5}}$

$|x| < 1$

e) $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{|k_0|^{1/k}}{2}\right| = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}|k_0|^{\overset{\to 0}{1/k}}$ $\begin{cases} 1/2 \text{ si } k \neq 0 \to \sum|a_k| \text{ acá diverge} \\ 0 \text{ si } k = 0 \to \sum|a_k| \text{ acá converge} \end{cases}$

Como no tiene sentido que me pidan la serie nula y no cambia en nada haciendo el lím sin módulos $\Rightarrow \sum a_k$ (D)

f) $\frac{k}{4k^2-3}$ y $\frac{1}{k}$ = $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{4k^2-3} \cdot k = \frac{1}{4}$ como $\sum 1/k$ (D)

$\Rightarrow \sum \frac{k}{4k^2-3}$ (D)

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+k+2}$ HC (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k\,3^k}$ $\boxed{\text{(i)}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

(j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ $\boxed{\text{(k)}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k}$ (l) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k+1}$

(m) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k$ $\boxed{\text{(n)}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (o) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k\,k!}{k^k}$ $r>0$

h) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^k}_{\to 0}\right| = 0 \Rightarrow \sum |a_n| (C) \Rightarrow \sum a_n (CA)$

$\Rightarrow \sum a_n (C)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k =$ pensando que es una serie de potencias con $z = 2/3$

$z_0 = 0$

Pista → veo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(z)^k = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} = -\log(1-z)$

$\boxed{\text{Preguntar como funciona esto}}$ da $\boxed{\ln(3)}$

11. Dar ejemplos de una serie compleja (no real):
    - (i) acotada pero que no converge, → $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta}$
    - (ii) que converge sólo condicionalmente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Series de números complejos

1 Definiciones y propiedades

Consideremos una sucesión cualquiera de números complejos $(z_n)_{n\geqslant 1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos lo que quiere decir la suma de los n primeros términos de la sucesión, suma que indicamos como $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$, o también $\sum_{k=1}^{n} z_k$. Lo que pretendemos ahora es contar con algo así como la "suma de todos los infinitos términos de dicha sucesión", suma que indicaríamos como $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$, o también $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Dado que no es posible efectuar infinitas sumas, se hace necesario introducir una definición. Para esto, consideremos las siguientes sumas:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + \ldots + z_n \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Es razonable definir $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ de manera que las sumas anteriores se le vayan acercando. En tal caso, estamos pidiendo que la sucesión $(S_n)_{n\geqslant 1}$ tenga límite, lo cual no está garantizado en todo caso. Por ejemplo, si tomamos la sucesión $z_k = (-1)^{k+1}$, la correspondiente sucesión $(S_n)_{n\geqslant 1}$ no lo tiene ya que que $S_n = 1$ si n es impar y $S_n = 0$ si n es par.

Definición: Sea $(z_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$. Llamamos serie de término general z_n a la sucesión $(S_n)_{n\geqslant 1}$ definida por (1). El número S_n se llama suma parcial $n-$*ésima* de la serie. Decimos que la serie converge a S (o que es convergente a S) sii existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$ y es igual a S, vale decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = S \tag{2}$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge, se dice que la serie diverge (o que es divergente).

Notación: El límite (2) suele representarse como $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Por abuso de notación, también se lo utiliza para hacer referencia a la serie, converja ésta o no.

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$

Para especificar el carácter convergente de la serie, notamos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (C)$ si converge y $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (D)$ si diverge.

Proposición 1. (condición necesaria de convergencia)

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge entonces $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

D) Si la serie converge a S, escribiendo el término general de la siguiente manera:

$$z_k = S_k - S_{k-1} = (S_k - S) + (S - S_{k-1}),$$

como $\lim_{k\to\infty} S_k - S = \lim_{k\to\infty} S_{k-1} - S = 0$, se concluye la tesis.□

Observación: No vale la recíproca. Contraejemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Proposición 2. Sea $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ con $\alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (C) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\ (C) \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\ (C)$$

D) Es consecuencia de la propiedad análoga para sucesiones y de la definición de serie.□

Ejemplo: Sobre la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ para $a \in \mathbb{C}$.

Si $|a| \geqslant 1$, la serie diverge ya que a^k no tiende a cero cuando $k \to \infty$.
Si $|a| < 1$, es posible calcular el valor de la $n - \acute{e}sima$ suma parcial:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

y por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}$.

Proposición 3. Si las series $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ convergen, entonces:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(z_k + w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} c\, z_k = c\sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad (c \in \mathbb{C})$

D) Cada una es consecuencia de la propiedad análoga para sucesiones y de la definición de serie.□

Observación: ¿Qué puede decirse sobre la convergencia de la serie de las sumas si al menos una de las dos series divergen? Si una converge y la otra diverge, la serie de las sumas también diverge. En cambio, no hay conclusión general si ambas divergen: basta ver los ejemplos dados por $z_k = (-1)^k$,$w_k = (-1)^{k+1}$ y $z_k = w_k = (-1)^k$.

Para lo que sigue, nos será útil tener en cuenta el siguiente resultado sobre *series reales:*

Lema. Siendo $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ vale:

a) si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ (C)$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\ (C)$ y $a_k \leqslant b_k \leqslant c_k\ \forall k \geqslant K \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ (C)$

b) si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\ (C) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ (C)$

D)

a) Es consecuencia del criterio de comparación de sucesiones.

b) Es consecuencia de *a)* usando que $-|a_k| \leqslant a_k \leqslant |a_k|$. □

Observación: No vale la recíproca de *b)*. Contraejemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Definición: Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ se dice absolutamente convergente sii $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|\ (C)$.

Notamos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (A.C)$.

Ejemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ es absolutamente convergente.

El siguiente teorema es la extensión de *b)* del Lema para series de números complejos:

Teorema. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

D) Sea $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ con $\alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|\ (C)$. Como $0 \leqslant |a_k| \leqslant |z_k|$ para todo k, por a) del Lema se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\ (C)$ y de aquí, por *b)* del Lema, que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ (C)$. De la misma manera, resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ (C)$. Luego, por la Proposición 2, se llega a $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\ (C)$.□

Definición: Si una serie es convergente pero *no* es absolutamente convergente, se dice que es condicionalmente convergente. Notamos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (C.C)$

Ejemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ es condicionalmente convergente.

2 Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ dos series tales que $|z_k| \leqslant |w_k| \ \forall k \geqslant K$ para algún K.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} w_k \ (A.C)$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (A.C)$.

D) Es consecuencia de *a)* del Lema. □

Ejemplo: Dado que $\left|\frac{1+i^k}{1+2^k}\right| \leqslant \frac{1+|i^k|}{1+2^k} \leqslant \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$ para todo $k \geqslant 1$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+i^k}{1+2^k} \ (A.C)$.

Criterio de D'Alembert

Sea una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ con $z_k \neq 0 \ \forall k \geqslant K$ para algún K.

i) Si $\exists r \ (0 < r < 1)$: $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leqslant r \ \forall k \geqslant K \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (A.C)$.

ii) Si $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \geqslant 1 \ \forall k \geqslant K \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (D)$.

D)

i) Como $|z_{k+1}| \leqslant r^{(k+1)-K} |z_K| \ \forall k \geqslant K$ y $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \ (C)$ para $0 < r < 1$, aplicando el criterio de comparación sale la tesis.

ii) Siendo $|z_{k+1}| \geqslant |z_k|$ a partir de K, entonces $z_k \nrightarrow 0$ y por lo tanto, la serie diverge.□

En muchos casos puede verificarse (y es más práctico) el siguiente criterio que es un caso particular del anterior:

$$\text{Si } \exists \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \rho \text{ y } \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \ (C) \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (D) \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{no se sabe} \end{cases}$$

Ejemplos:

1) Si el término general de la serie es $z_k = \frac{1}{2^k}$, aplicando el criterio en su versión más particular, se deduce la convergencia de la serie. Sin embargo, para el caso: $z_k = \frac{1}{2^k}$ si k es par y $z_k = \frac{1}{3^k}$ si k es impar, podremos garantizar la convergencia sí aplicamos el criterio en su forma más general. ¿Cuál es el valor de cada una de las series?

2) Los siguientes ejemplos confirman que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = 1$ no brinda información sobre el comportamiento de la serie: se sabe que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ (D)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ (C)$ pero tanto para $z_k = \frac{1}{k}$ como para $z_k = \frac{1}{k^2}$ se verifica que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = 1$.

Criterio de Cauchy

Sea una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$:

i) Si $\exists r \ (0 < r < 1)$: $\sqrt[k]{|z_k|} \leqslant r \ \forall k \geqslant K \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (A.C)$.

ii) Si $\sqrt[k]{|z_k|} \geqslant 1$ para infinitos $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (D)$.

D)

i) Como $|z_k| \leqslant r^k \ \forall k \geqslant K$ y $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \ (C)$ para $0 < r < 1$, aplicando el criterio de comparación sale la tesis.

ii) Resulta que $|z_k| \geqslant 1$ para infinitos k, entonces $z_k \nrightarrow 0$ y por lo tanto, la serie diverge. □

Para este criterio también se cuenta con un caso particular:

$$\text{Si } \exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} = \rho \text{ y } \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (A.C). \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \ (D) \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{no se sabe} \end{cases}$$

Ejemplo: $z_k = \frac{1}{k^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \ (C)$.

Los criterios presentados hasta aquí nos permiten determinar la convergencia absoluta de una serie de términos complejos pero desde ya que también es importante contar con otros que nos ayuden a estudiar la convergencia (condicional) de una serie.

En el caso particular de series de términos *reales*, tenemos:

Criterio de Leibniz (para series de téminos alternados).

Si una sucesión $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ verifica:

$$
\begin{aligned}
&i)\ a_n \geqslant 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\\
&ii)\ a_{n+1} \leqslant a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\\
&iii)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0
\end{aligned}
$$

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

D) Para no extender tanto este apunte y dado que es un criterio específico de series reales, no lo desarrollamos aquí (se puede encontrar en general en cualquier texto recomendado en cursos de variable real).☐

Los criterios que veremos a continuación permiten decidir si una serie compleja es convergente, sin estudiar la convergencia absoluta. Los mismos se fundamentan en el siguiente resultado:

Lema. Sean $(z_k)_{k\geqslant 1}$, $(w_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ y $S_k = z_1 + \ldots + z_k$. Para todo n vale:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k w_k = S_n w_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k(w_{k+1} - w_k)$$

Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k w_k$ converge si la sucesión $(S_k w_{k+1})_{k\geqslant 1}$ converge y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(w_{k+1} - w_k)$ converge.

D) Si hacemos $S_0 = 0$, vale

$$\sum_{k=1}^{n} z_k w_k = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})w_k = \sum_{k=1}^{n} S_k w_k - \sum_{k=1}^{n} S_k w_{k+1} + S_n w_{n+1}$$

y resulta todo lo enunciado.☐

Criterio de Dirichlet

Sea $(z_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$, $(b_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ y $S_k = z_1 + \ldots + z_k$

Si $(S_k)_{k\geqslant 1}$ sucesión acotada y $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sucesión decreciente que converge a cero entonces $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$ (C).

D)

La sucesión $(S_k b_{k+1})_{k\geqslant 1}$ converge a cero pues $(S_k)_{k\geqslant 1}$ es acotada y $(b_k)_{k\geqslant 1}$ converge a cero.

Como existe M tal que $|S_k| \leqslant M$, se tiene $|S_k(b_{k+1} - b_k)| \leqslant M\,|b_{k+1} - b_k|$.

Debido a las hipótesis sobre b_k, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}|b_{k+1} - b_k|$ (C) y por comparación resuta $\sum_{k=1}^{\infty}|S_k(b_{k+1} - b_k)|$ (C) con lo cual, se tiene $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(b_{k+1} - b_k)$ (C).

Por lo tanto, por el Lema anterior, se obtiene la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$.☐

Criterio de Abel

Sea $(z_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$, $(b_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$..

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ (C) y $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sucesión monótona y convergente entonces $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$ (C).

D)

La convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es equivalente a la convergencia de la sucesión de sumas parciales $(S_k)_{k\geqslant 1}$. Luego, como $(b_k)_{k\geqslant 1}$ converge, se tiene que $(S_k b_{k+1})_{k\geqslant 1}$ converge.

En particular, la sucesión de sumas parciales es acotada y procediendo como en la demostarción del criterio anterior, usando las hipótesis sobre $(b_k)_{k\geqslant 1}$ se obtiene la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(b_{k+1} - b_k)$.

Por lo tanto, por el Lema anterior, se obtiene la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} z_k b_k$. ☐

Desarrollo en serie de potencias alrededor en z_0

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , |z|<1$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n \ , |z|<1$$

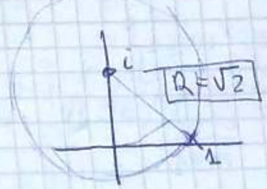
$z_0 = 0$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i)+(i-1)} = \frac{1}{(i-1)} \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{i-1}\right)} = \frac{1}{(i-1)} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i-1}\right)}$$

$z_0 = i$

$$= \frac{1}{i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{z-i}{i-1}\right)^n \quad \text{Si} \left|\frac{z-i}{i-1}\right| < 1$$

$$= \sum \frac{(-1)^n}{(i-1)^{n+1}} (z-i)^n$$ para z tales que $|z-i| < \sqrt{2}$



$F'''(i) =$ coef de $(z-i)^3 \cdot 3!$

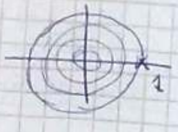
$$F'''(i) = \frac{(-1)^3}{(i-1)^4} \cdot 3!$$

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ $z_0 = 0$ Sea $g(z) = \frac{-1}{z-1}$

$$g'(z) = \frac{1}{(z-1)^2} = f(z)$$

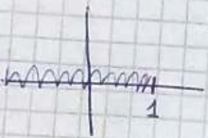
$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, , \, |z|<1$

$g'(z) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad |z|<1$



$h(z) = \text{Log}(z-1)$

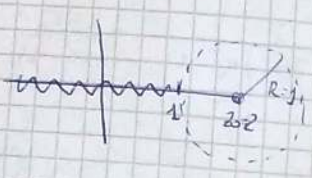
h es holo en $\mathbb{C} - \{z/z=x, \; x\leq 1\}$



Admite DSP centrado en $z_0=0$?

No, no es holo en z_0

Admite desarrollo en SDP en $z_0=1$ y el radio de convergencia es $R=1$



$h'(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+2-1} = \frac{1}{1-(-(z-2))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$

Si $z \in \mathbb{C} - \{z/z=x, x\leq 1\}$ $\qquad |z-2|<1$

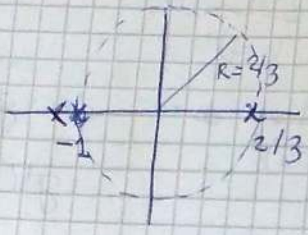
Luego $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+1} (z-2)^{n+1} + a_0$

con $a_0 = \frac{h(2)}{0!} = \text{Log}(2-1) = \text{Log}(1) = 0$

$0! = \ln(1) + i \, \text{Arg}(1)$

$f(z) = \frac{1}{(3z-2)(z+1)}$

$z_0=0$



$= \frac{A}{3z-2} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+B(3z-2)}{(3z-2)(z+1)} = \frac{(A+3B)z+A-2B}{(3z-2)(z+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+3B=0 & B=-1/5 \\ A-2B=1 & A=3/5 \end{cases}$

$f(z) = \frac{3/5}{3z-2} - \frac{1/5}{z+1}$

$\frac{3/5}{3z-2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot\frac{1}{1-3/2z} = -3/10 \sum_{n=0}^{\infty} (3/2 \, z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3^{n+1}}{5 \cdot 2^{n+1}} z^n$

si $|3/2 z|<1$

$\frac{1}{5}\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{5}\frac{1}{(1-(-z))} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5} z^n$

si $|-z|<1$

$f(z) = \frac{3/5}{3z-2} - \frac{1/5}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3^{n+1}}{5 \; 2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5} z^n$

si $|z|<2/3$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3^{n+1}}{5 \cdot 2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{5} \right) z^n$

$l(z) = \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 1+z^2+z^4+z^6$

si $|z^2|<1$

$l^{(3)}(0) = \text{coef de } z^3 \cdot 3! = 0$

$l^{(6)}(0) = \text{coef de } z^6 \cdot 6! = 6!$

$\frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{z}$

$$\frac{z}{1-z^2} = z\cdot\frac{1}{1-z^2} \overset{|z^2|<1}{=} z\sum_0^{\infty} z^{2n} = \sum_0^{\infty} z^{2n+1}$$

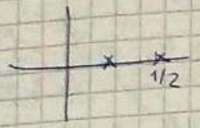
$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{(1-\omega)^2} = \sum n\,\omega^{n-1} = \sum_0^{\infty} n\,(z^2)^{n-1}$$

$z^2=\omega$ $\quad|\omega|<1$

$$= \sum_0^{\infty} n\,z^{2n-2}$$

Serie de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z-2z^2} = \frac{1}{z(1-2z)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-2z}$$



$$= \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{\infty}(2z)^n = \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m z^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2^m z^{m-1} = \frac{1}{z} + 2z^0 + 4z^1 + 8z^2 + 16z^3$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2 + 4z + 8z^2 + 16z^3 + \cdots$$

para $z\neq 0$, $|2z|<1$

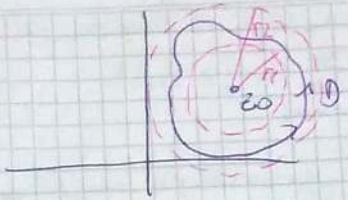
es decir $z\in D = \{z\in\mathbb{C} / 0<|z|<1/2\}$

Teorema de Laurent

Sea f holom en $D = \{z\in\mathbb{C} / r1<|z-z0|<r2\}$

$\Rightarrow f$ admite un DSP de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

con $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ donde C es un contorno cerrado, contenido en D con $z_0\in RI(C)$, positivamente orientados.



b) C: cualquier curva con las características pedidas por invarianza homotópica

$\frac{1}{3!}$ +

Observaciones:

a) r_1 puede ser 0, r_2 puede ser ∞

Si $r_1=0$, $r_2<\infty$: D = disco perforado

Si $r_1\neq 0$, $r_2=\infty$: D = complemento de disco

c) supongamos que f es tmb holo en $|z-z_0|\leq r1$

Por TICG $\quad C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{m!}$ si $m\geq 0$

Si $n<0$, $\quad C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-z_0)^{\overbrace{-n-1}^{\geq 0}}dz = 0$

d) Cuánto vale r_1 y r_2?

r_1 puede ser tan chico y r_2 puede ser tan grande tal que f sea holo en $r_1<|z-z_0|<r_2$

e) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_m(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_m(z-z_0)^n$$

$\frac{1}{z}$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{(z-z_0)^m}}_{\text{converge en } |z-z_0|>r_1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n}_{\text{converge en } |z-z_0|<r_2}$$

$m=-n$

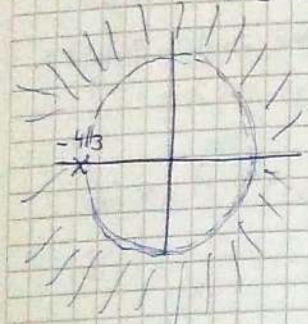
Teorema

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} / r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

$\Rightarrow$ la serie <u>converge absolutamente</u> en D, y converge uniformemente en $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} / t_1 \leq |z - z_0| \leq t_2\}$ con $r_1 < t_1 < t_2 < r_2$

<u>Ej</u> $f(z) = \frac{1}{3z+4} \rightarrow$ DSL con centro en $z_0 = 0$, |

$D = \{z / |z| > \frac{4}{3}\}$



$$f(z) = \frac{1}{3z\left(1 + \frac{4}{3z}\right)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-4}{3z}\right)}$$

$$f(z) = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{3z}\right)^n$$

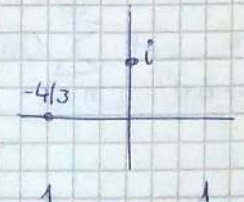
$\downarrow$

$$\left|\frac{-4}{3} z\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{4}{3}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1} \cdot z^{m+1}} = \frac{1}{3z} - \frac{4}{9z^2} + \frac{16}{27z^3} - \frac{64}{81z^4} + \cdots$$

$f(z) = \frac{1}{3z+4}$, $z_0 = i$

en $D = \{z / |z - i| > R\}$



$$f(z) = \frac{1}{3(z-i) + 3i + 4} = \frac{1}{3(z-i)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{3i+4}{3(z-i)}\right)} =$$

$\nearrow$ si $\left|\frac{3i+4}{3(z-1)}\right| < 1$

$$= \frac{1}{3(z-i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{-(3i+4)}{3(z-i)}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3i+4)^n}{3^{n+1} (z-i)^{n+1}}$$

Si $|z - i| > \left|\frac{3i+4}{3}\right| = \left|i + \frac{3}{4}\right| = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

- $f(z) = e^{1/z}$, f es holo $\mathbb{C} - \{0\}$
  $z_0 = 0$ $\quad D = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z|\}$

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \quad \forall \omega \in \mathbb{C}$$

$\forall z \neq 0$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z^3}$$

$$g(z) = z^6 e^{1/z} = z^6 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! z^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! z^{m-6}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{6-n}}{n!} \quad z \neq 0$$

$$= z^6 + \frac{z^5}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7! z}$$

Ceros de funciones holomorfas

z_0 es cero de f si $f(z_0) = 0$

z_0 es un cero aislado de ~~f0~~ si $\exists$ un entorno de z_0 / $f(z) \neq 0$ $\forall z$ en ese entorno, $z \neq z_0$.

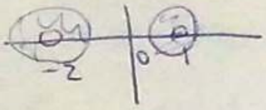
<u>Teorema</u>: Los ceros de una func holom no nula son aislados

<u>Demostración</u>: Sea z_0 es cero de f. f holom $f(z_0) = 0$.
Como f es holom en z_0 y en un entorno, admite DST centrado en z_0.

1-a) $f(z) \xrightarrow{} $ función racional → Sing evitable o polos

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad D_f = \mathbb{C} - \{1,-2\}$$

• 1, -2 "ceros" de $h(z)$



• ptos singulares $\left.\begin{matrix} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \end{matrix}\right\rangle$ aislados

$$\boxed{z = \infty}$$

$z_1 = 1$

$\lim_{z \to 1} f(z) = \infty \to$ polo

$\lim z \to 1 \quad (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{(z+2)^2} = \frac{2}{9} \neq 0$
↓
Polo 1° orden

$z_2 = -2$

$\lim_{z \to -2} f(z) = \infty \to$ polo 2° orden

$\lim_{z \to -2} (z+2)^2 f(z) = \lim_{z\to -2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{-1}{-3} \neq 0$ ↗ Polo de 2° orden

$z = \infty \qquad g(z) = f(1/z)$

Analizo qué tipo de sing es $z=0$ de g

$$g(z) = \frac{\frac{1}{z}+1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}+2\right)^2} = \frac{\frac{1+z}{z}}{\frac{1-z}{z} \cdot \frac{(1+2z)^2}{z^2}}$$

$$g(z) = \frac{z^2(1+z)}{(1-z)(1+2z)^2}$$

$\lim_{z \to 0} g(z) = 0$

$\Rightarrow z = 0$ sing evit de g

$\rightarrow \boxed{z = \infty \text{ sing " de } f}$

1-F) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-\mathrm{ch}(z))} = \dfrac{g(z)}{h(z)} > H(\mathbb{C})$

sing de F → ceros de h

- $z=\infty$ ↳ $z=\infty$
- $z=0$

$z(1-\mathrm{ch}(z))=0$

$\mathrm{ch}(z)=1$

$e^{z}+e^{-z}=2$

$e^{2z}-2e^{z}+1=0$

$(e^{z}-1)^{2}=0$

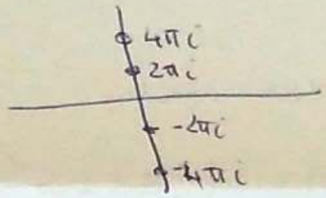
$e^{z}=1$

$e^{x}e^{iy}=1e^{i0}$

$\begin{cases} e^{x}=1 \rightarrow x=0 \\ y=0+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\boxed{z_k = i2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

aislados



$g(z)\neq 0, \forall z\in\mathbb{C}$

$\lim\limits_{z\to i2k\pi} \dfrac{1}{z(1-\mathrm{ch}(z))} = \infty$ ↘ polos!

$\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty \rightarrow z=\infty$ es sing <u>no</u> aislada

$\boxed{k\neq 0}$

$\lim\limits_{z\to 2k\pi i} f(z)(z-2k\pi i)$

$= \lim\limits_{z\to 2k\pi i} \dfrac{z-2k\pi i}{z(1-\mathrm{ch}(z))} = \infty$

$\underbrace{z}$ ↙ $2k\pi i \neq 0$ CAUX

<u>CAUX</u>

$\lim\limits_{z\to 2k\pi i} \dfrac{z-2k\pi i}{1-\mathrm{ch}(z)}$

$= \lim\limits_{z\to 2k\pi i} \dfrac{1}{-\mathrm{sh}(z)} = \dfrac{-1}{\underbrace{\mathrm{sh}(2k\pi i)}_{0}} = \infty$ ← no es polo de orden 1

$\mathrm{sh}(2k\pi i) = i\,\mathrm{sen}(2k\pi) = 0$

$$\lim_{z\to 2k\pi i} f(z)(z-2k\pi i)^2$$

$$= \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{(z-2k\pi i)^2}{z(1-ch(z))]}$$

$$\lim_{z\to z_K} f(z)(z-z_K) = \frac{-2}{z_k}, k\neq 0.$$

$$\boxed{z_K = 2k\pi i \to \text{polo de orden } 2 \quad k\neq 0}$$

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{(z-2k\pi i)^2}{1-ch(z)}$$

$$= \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{2(z-2k\pi i)}{-sh(z)}$$

$$= \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{2}{-ch(2k\pi i}$$

$$= \frac{2}{-1} = -2 \neq 0$$

con $z=0$, $z=0$ es un polo de orden 3

<u>Nota</u>: $h(z) = z(1-ch(z))$

$z=0 \to$ cero de orden 3 de h

$\varphi(z) = 1 - ch(z)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(0) = sh(0) = 0$

$\varphi''(0) = -ch(0) = -1 \neq 0$

$\to$ cero de orden 2 de $1-ch(z)$

$\to z=0$ "cero" de orden 3 de $z(1-ch\,z)$

$z=0$ es polo de orden 3.

1-h)

$$f(z) = \frac{1}{(z-5)^7} + \frac{4}{(z-5)} + (z-5)^3$$

$\to$ DSL de f válido para $|z-5|>0$

PS $z=5$ sing aislada

$\downarrow$

polo de orden 7

$z=\infty$

1-g) $$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z}}-1}$$

$z=\infty$

$z=1$

$z=0$

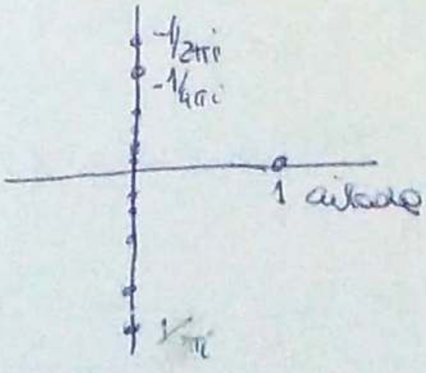
$z / e^{1/z}-1=0$

$z / e^{1/z}=1$

$$\frac{1}{z} = 2k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}-\{0\}$$

$$z_K = \frac{1}{2k\pi i}, \; k\in\mathbb{Z}-\{0\} \to \text{sing aisladas}$$

$$\lim_{k\to\infty} |z_K| = 0 \to z=0 \text{ sing } \underline{\text{no}} \text{ aislada}$$



$$\lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z-1}} = \lim_{w\to 0} e^{1/w}$$

$$\underset{\downarrow}{} \quad z-1=w$$

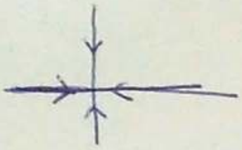
Nota

den: $\lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z}-1} = e-1 \neq 0$

$\therefore \boxed{z=1 \text{ sing esencial}}$ caux

$$w=x$$

$$\lim_{x\to 0} e^{1/x} \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty \\ \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \end{cases} \nexists$$



$\underbrace{w=iy}$

$$\lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{iy}} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{-i}{y}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(\cos(1/y) - i\,\text{sen}(1/y)\right) \nexists$$

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{1/z}-1} = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad h\left(\frac{1}{2k\pi i}\right)=0$$

$g\left(\frac{1}{2k\pi i}\right) = e^{\frac{1}{2k\pi i-1}} \neq 0$ g holom en z_k

$$h'(z) = -\frac{1}{z^2} e^{1/z}$$

$h'\left(\frac{1}{2k\pi i}\right) = \frac{-1 \, e^{1/[(2k\pi i)]^{-1}}}{[(2k\pi i)^2]^{-1}} \neq 0$ → polos de orden 1

$z_k = \frac{1}{2k\pi i}$ polos de orden 1

$\underbrace{z=\infty}$ $h(z) = f(1/z) = \frac{e^{\frac{1}{1/z-1}}}{e^z-1}$

$$= \frac{e^{\frac{z}{1-z}}}{e^z-1} = h(z)$$

$z=0$ polo $\lim_{z\to 0} h(z)=0$

$$\lim_{z\to 0} z\,h(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{z}{1-z}} \frac{z}{e^{z-1}} \overset{L'H}{=} 1$$

Otra forma:

$$\lim_{z\to z_k} f(z) = \infty$$

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) =$$

$$\lim_{z\to z_k} e^{1/z-1} \frac{z-z_k}{e^{1/z-1}}$$

caux

$$\lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{e^{1/z}-1} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{-1/z^2 e^{1/z}}$$

$$= \frac{1}{-1/z_k^2 e^{1/z_k}} = -(2k\pi i)^2 \underbrace{e^{-2k\pi i}}_{1}$$

DST: $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m$

$f^{(0)}(z_0) = f(z_0) = 0$

Sea $N / f^{(N)}(z_0) \neq 0$ y $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \frac{f^{(N)}(z_0)(z-z_0)^N}{N!}$$

$$+ \frac{f^{(N+1)}(z_0)(z-z_0)^{N+1}}{(N+1)!} + \ldots$$

$$= (z-z_0)^N \Bigg(\underbrace{\frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} + \frac{f^{(N+1)}(z_0)(z-z_0)}{(N+1)!} + \frac{f^{(N+2)}(z_0)(z-z_0)^2}{(N+2)!} + \ldots}_{} \Bigg)$$

serie de potencias, es función holomorfa $\varphi(z)$

$f(z) = (z-z_0)^N \cdot \varphi(z)$

como $\varphi(z_0) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} \neq 0$

~~y~~ φ es continua

$\varphi(z) \neq 0$ en un entorno de z_0

$\Rightarrow f \neq 0$ en entorno de z_0, excepto z_0

Principio de identidad

Sean f y g holom en D.

Sea $D_0 = \{ z \in D / f(z) = g(z) \}$ si D_0 tiene algún punto no aislado $\Rightarrow f(z) = g(z) \ \forall z \in D$

Dem Sea $h(z) = f(z) - g(z)$, h es holo en D

$h(z) = 0$ en $D_0 \Rightarrow h$ tiene algún cero no aislado

$\Rightarrow h$ tiene que ser $h \equiv 0$ en $D \Rightarrow f \equiv g$

Ej $f = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$, $g = 1$ $\Big\} \in H(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ sabemos que si $z = x \in \mathbb{R}$, $f(z) = g(z)$

$D_0 = \{ z \in \mathbb{C},\ z = x, x \in \mathbb{R} \} \rightarrow$ todos puntos no aislados

$\rightarrow f(z) = g(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\boxed{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1} \ \forall z \in \mathbb{C}$

Ej $\exists f$ entera / $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ \forall m = \mathbb{N}$

$f(0) = 0$ por ser f continua

$z_0 = 0$ es un cero no aislado

$\Rightarrow$ la única func con esas caract es la $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Ej $f(z) = \begin{cases} z^2 \operatorname{sen} 1/z & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ ¿Es holomorfa en $z = 0$?

Si $z \neq 0$, f es holom, f no es nula

Ceros de f:
- $z = 0$
- $z \neq 0$, $z^2 \operatorname{sen} 1/z \leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

$\leftrightarrow \frac{1}{z} = k\pi$

$\leftrightarrow z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = 0$ es cero no aislado $\Rightarrow f$ no puede ser holom en todo $\mathbb{C} \Rightarrow f$ no es holo en 0

12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ una serie compleja convergente. Probar que:

(i) $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ y $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$ son sucesiones acotadas,

(ii) si $\mathrm{Re}\, z_n \geq 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, z_n)^2$ es convergente,

$|\mathrm{Re}\, z_n| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{Re}\, z_n^2} \geq 0 \quad \sum^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n^2 \geq 0$

(iii) si $|\mathrm{Arg}\, z_n| \leq \theta < \pi/2$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \overset{\text{converge}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ conv y $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ conv

i) Si $\sum z_n$ es conv $\Rightarrow \{z_n\}$ es acotada, es decir,

$\exists \underset{>0}{\varepsilon} \,/\, |z_n| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ tan chico como se quiera no

Si $z_n = \mathrm{Re}\, z_n + i\, \mathrm{Im}\, z_n$

$\Rightarrow |z_n| = |\mathrm{Re}(z_n) + i\,\mathrm{Im}(z_n)| < \varepsilon$

1) $|\mathrm{Re}(z_n)| \leq |\mathrm{Re}(z_n) + i\,\mathrm{Im}(z_n)| < \varepsilon$

$\rightarrow |\mathrm{Re}(z_n)| < \varepsilon \Rightarrow \{\mathrm{Re}(z_n)\}$ está acotada ✓

2) $|i\,\mathrm{Im}(z_n)| = |\mathrm{Im}(z_n)| \leq |z_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow |\mathrm{Im}(z_n)| < \varepsilon \Rightarrow \{\mathrm{Im}(z_n)\}$ está acotada

porque si converge $\sum$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ lo cual es equiv a decir:

$|z_n - 0| < \varepsilon$ para $n > N_0$

pero los 1º términos pueden ser grandes...

Sucesiones y Series de Funciones.

13. Calcular $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para $z \in \Omega$ siendo:

(a) $f_n(z) = \frac{1}{n} e^{-n|z|} \qquad \Omega = \mathbb{C}$

(b) $f_n(z) = \frac{z^3}{n^2 + z^2} \qquad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

(c) $f_n(z) = e^{-n^2 z} \qquad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq r\}\ (r > 0), \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$

¿En qué casos la convergencia es uniforme?

14. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ es absolutamente convergente en $\mathrm{Re}\, z > 1$.

13) a) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \underbrace{e^{-n|z|}}_{0} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$f_n \xrightarrow{\text{punt en } \mathbb{C}} 0$

Veo si converge uniformemente:

$\sup\left\{\frac{1}{n} e^{-n|z|}, z \in \Omega\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{1}{n} e^{-n|z|} - 0\right\| = \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - 0|, z \in \Omega\}$

Busco una cota superior:

$|z| \geq 0$

$-n|z| \leq 0$

$e^{-n|z|} \leq 1 \rightarrow \frac{1}{n} e^{-n|z|} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif en } \mathbb{C}} f = 0$ ✓

b) Veo

$\lim_{n\to\infty}$

Veo co

¿ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$? para todo $z \in \Omega$

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\} \quad |z| \leq 1$

¿Qué pasa si es menor estricto?

$|z|\,|n^2| \leq |n^2|$

$\boxed{|zn^2| \leq |n^2|}$

$\sup\{|f_n(z) - f(z)|, z \in \Omega\}$

$= \sup\left\{\left|\frac{z^3}{n^2+z^2} - z\right|, z \in \Omega\right\}$

$zn^2 \leq |n^2|$

$= \sup\left\{\frac{z^3 - z(n^2+z^2)}{n^2+z^2}, z \in \Omega\right\}$

$|z^2| \leq 1$

$|z^2| + |n^2| \leq 1 + |n|^2$

$= \sup\left\{\left|\frac{zn^2}{n^2+z^2}\right|, z \in \Omega\right\}$

$|z^2 + n^2| \leq |z^2| + |n^2| \leq 1 + |n|^2$

$\boxed{|z^2 + n^2| \leq 1 + |n|^2}$

[illegible]

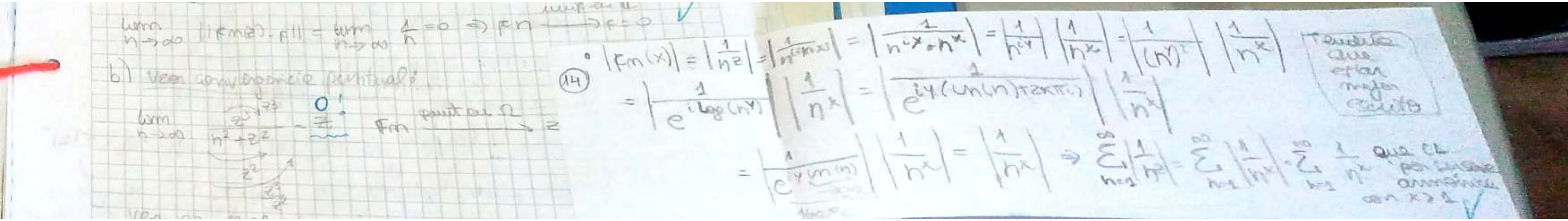
$= \left|\frac{n^2}{z^2+n^2}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{z^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(1+z^2/n^2)} = 1 \neq 0$

n^2 es mucho más grande que z^2

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\text{unif en } \Omega}$

$\frac{1}{3!}$ +

$\frac{1}{2}$



$\lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif. en } \Omega} f = 0$ ✓

b) Veo convergencia puntual:

$\lim_{n\to\infty} \frac{z^3}{n^2+z^2} = \overset{0\,!}{\underset{\sim}{z}} \quad f_n \xrightarrow{\text{puntual en } \Omega} z$

z^2 $\frac{z^3}{z^2}$

⑭ • $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\frac{1}{n^{(iy+x)}}\right| = \left|\frac{1}{n^{iy}\cdot n^x}\right| = \left|\frac{1}{n^{iy}}\right| \left|\frac{1}{n^x}\right| = \left|\frac{1}{(n^y)^i}\right| \left|\frac{1}{n^x}\right|$

$= \left|\frac{1}{e^{i\,\mathrm{Log}(n^y)}}\right| \left|\frac{1}{n^x}\right| = \left|\frac{1}{e^{iy(\ln(n)+2k\pi i)}}\right| \left|\frac{1}{n^x}\right|$

$= \left|\frac{1}{e^{iy\ln(n)}}\right| \left|\frac{1}{n^x}\right| = \left|\frac{1}{n^x}\right| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ que es conv. por la serie armónica con $x > 1$ ✓

Tendría que estar mejor escrito

Desarrollos en Series de Potencias.

16. Determinar el dominio de convergencia en $\mathbb{C}$ de las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n, \quad a \in \mathbb{C}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z+1)^n}{3n+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{kn}, \quad k \in \mathbb{N}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

16)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|a^{n+1}|}{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} |a| = |a|$ $\boxed{C_n = a^n}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{|a|}$ $\Rightarrow \sum a^n z^n$ (c) en $B\left(0, \frac{1}{|a|}\right)$ ✓

Veo si converge en $|z| = \frac{1}{|a|}$

$\sum |a^n z^n| = \sum |a^n||z^n| = \sum |a|^n |z|^n = \sum |a|^n \frac{1}{|a|^n} = \sum (1)^n$

$\downarrow$ $|z| = \frac{1}{|a|}$ $\swarrow$ diverge

↳ pero ahí probá que no CA.

$\Rightarrow \boxed{D_0 = B\left(0, \frac{1}{|a|}\right)}$

si $|z| = \frac{1}{|a|}$, $z = \frac{1}{a} e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi)$

no tengo problemas en hacer este cambio, $k \in \mathbb{N}$ ✓

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (z^k)^n$ $\boxed{w = z^k}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} w^n$ $C_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| / \left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{1 + 1/n}_{\to 1}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{R = 1}$ ✓ $\Rightarrow \sum \frac{1}{n} w^n$ (c) en $B(0,1)$

es decir $\{w \in \mathbb{C} / |w| < 1\}$

$\therefore \sum \frac{1}{n} z^{kn}$ (c) en $B(0, 1^{1/k})$

es decir $\{z \in \mathbb{C} / |z| < \underbrace{1^{1/k}}_{=1}\}$

$|w| = |z|^k$

$|w| < 1$

$|z|^k < 1$

$\} |z| < 1^{1/k}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$

$\sum \frac{1}{n} w^n$ converge en $\overline{B}(0,1)$?

$w = e^{i\theta}$

n≥0 siempre

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n} w^n\right|}_{\text{está mirando C.A.}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| |w|^n \underset{|w|=1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |1|^n \left|\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (D)}$$

$\frac{1}{3!}$ +

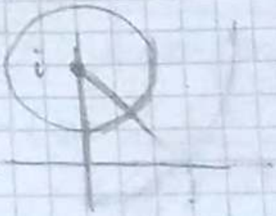
$\Rightarrow D_0 = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1^{1/k} \}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(z-i)^n \qquad z_0 = i \qquad C_n = \frac{1}{n^2}$

Busco R:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| \Big/ \left|\frac{1}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

ya se que converge en $B(i, 1)$, veo si converge en $\overline{B}(i,1)$



veo para $|z-i| = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}(z-i)^n\right| \underset{|z-i|=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| |1|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge porque es la suma de una sucec hiperarmonica

→ sí, converge absolutamente

$$\Rightarrow D_0 = \{ z \in \mathbb{C} / |z-i| \leq 1 \} = \overline{B}(i,1)$$

c) $C_n = \frac{2}{3n+1}$, $z_0 = -1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2 \cdot 3n+1}{(3(n+1)+1) \cdot 2}\right| = 1$$

R=1 me fijo si converge en $|z+1| = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z+1)^n}{3n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+1} \text{ (D.)}$$ porque no criterio por al límite entre 0 e ∞

$a_n = \frac{2}{3n+1} \sim b_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = 2/3$

como $\sum 1/n$ (D) ∴ $\sum \frac{2}{3n+1}$ (D)

$D_0 = B(i,1)$

e) $z_0 = 0$, $C_n = n!/n^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \left|(n+1)\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n\right| = \infty \Rightarrow \boxed{D_0 = 0}$$

e^{-1} ∞

1 → 1

17. (a) Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^2+n^2}$ con $a > 0$, hallar la región de convergencia de $f(z)$ y probar que la convergencia es uniforme en la región cerrada.

(b) Justificar que f es una función holomorfa y encontrar su derivada. ¿Es, la serie resultante al derivar término a término la f, uniformemente convergente en la región cerrada?

$\to z_0 = 0$

$a_n = \frac{1}{a^2+n^2}$

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2+n^2}{a^2+(n+1)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$$

por ahora converge en $B(0,1)$

$z_0 = 0$

$a_n = \frac{1}{a^2+n^2}$

Veo que pasa en el borde?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^2+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{in\theta}}{n^2+a^2}}_{b_n}$$

$|z| = 1 = e^{i\theta}$

$\theta \in [0, 2\pi]$

[illegible]

Veo CA:

en el borde $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{e^{in\theta}}{n^2+a^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ (c)

Por crit de comp

$0 \leq \frac{1}{n^2+a^2} \leq \frac{1}{n^2}$

como $\sum \frac{1}{n^2}$ (c)

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+a^2}$ (c)

$\therefore$ como $\sum |b_n|$ (CA) $\Rightarrow \sum b_n$ (c)

$\Rightarrow \boxed{D_0 = \overline{B}(0,1)}$ → donde converge absoluta y uniformemente. ✓

¿Converge uniformemente? Prueba

ya que los $z \in \overline{B}(0,1)$

1) $|f_n(z)| = \left|\frac{z^n}{a^2+n^2}\right| = \frac{|z|^n}{|a^2+n^2|} \leq \frac{1}{|a^2+n^2|}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ (c)

⇨ $\sum f_n(z)$ (CU) en D_0 ✓

b) $f'(z) = \frac{n z^{n-1}}{a^2+n^2}$

• como $f(z)$ es una func de potencias fue CU en $\overline{B}(0,1)$ y absolut

⇒ la serie se puede derivar e integrar t a t, es holom en $B(0,1)$

$\frac{1}{3!}$ +

Veo si $f'(z)$ CU en $\overline{B}(0,1)$?

① $|f'(z)| = \left|\frac{n z^{n-1}}{a^2+n^2}\right| = \frac{n |z|^{n-1}}{a^2+n^2} \leq \frac{n}{a^2+n^2}$

$z \in \overline{B}(0,1)$

$|z| \leq 1$

$|z|^{n-1} \leq 1^{(n-1)} = 1^n \cdot 1^{-1} = 1$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{a^2+n^2}}_{a_n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$

Por crit de comp paso al límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n}{a^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+a^2/n^2)} = 1 = L$$

como $0 < L < +\infty$ las series se comportan igual,

como $\sum \frac{1}{n}$ (D) $\Rightarrow \sum \frac{n}{a^2+n^2}$ (D)

Pero Weierstrass dice: si $|f_n| \leq M_n$ $\forall z$ y $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n(z)$ c.u.

no dice q' si $\sum M_n$ div $\Rightarrow \sum f_n(z)$ no c.u.

⇨ la serie de su derivada ~~no~~ converge uniformemente

18. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie $\sum_{n=30}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$ es convergente.

la serie $\sum_{n=30}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$ converge para $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$ porque para

Si $\left|\frac{z}{z+1}\right| > 1$, la serie se va haciendo cada vez más grande,

⇒ condición necesaria que la sucesión tienda a cero,

lo cual no ocurre en este caso. $|z| < |z+1|$ $\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

los z / $Re(z) > 0$?

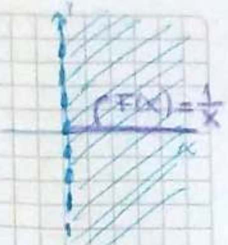
Si $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$, la sucesión tampoco tiende a 0, sino a ∞ y la serie es la suma de infinitos, ento...

(2B) b) F(z) derivable en Re(z) > 0

$F(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$

demostrar

$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in Re(z) > 0$



Sea $G(z) = \frac{1}{z}$, G es holom en $\mathbb{C} - \{0\}$

$\Rightarrow F(z) = G(z)$ si $z = x, x > 0$

$D = \{ z \in \text{dom } F \cap \text{dom } G : F(z) = G(z) \}$

Como D tiene puntos de acumulación $\Rightarrow F(z) = G(z)$ en $Re(z) > 0$

---

① $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$f(z) = \frac{z \cdot \bar{z}}{\bar{z} \cdot \bar{z}} = \frac{z \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{(x+iy)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{z^2}{|z|^2}$

$f(z) = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+2xyi-y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

- u y v son diferenciables por ser compos. de funciones polinómicas, clase C^∞, salvo donde se anula el denominador (o sea en el (0,0))

$\downarrow$ $D = \mathbb{C} - \{0\}$ D abierto

- $u'x = \frac{2x \cdot (x^2+y^2) - (x^2-y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

- $u'y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

- $v'x = \frac{2y(x^2+y^2) - 2x \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^2+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$v'x = \frac{-2yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad v'y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} \frac{-2xy^2+2x^3}{(x^2+y^2)^2}$

<u>Verifico en qué puntos se cumplen las cond. de C-R:</u>

$u'x = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = v'y = \frac{-2xy^2+2x^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \begin{cases} 6xy^2 = -2x^3 \\ 6y^2 = -2x^2 \end{cases}$

$4xy^2 = -2xy^2 - 2x^3 \quad \boxed{6y^2+2x^2=0}$ (0,

• $u'_y = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = -V'_x = \frac{(-2yx^2+2y^3)(-1)}{(x^2+y^2)^2}$

$-4x^2y = 2yx^2 - 2y^3$

$\cancel{-}6x^2y = \cancel{-}2y^3$

$6x^2 = 2y^2$

$\boxed{6x^2-2y^2=0}$ (b)

Veo entonces cuando se cumplen (a) y (b)

$6y^2+2x^2=0 \rightarrow 3y^2+x^2=0$

$6x^2-2y^2=0 \rightarrow 3x^2-y^2=0$

$\downarrow$

$\boxed{y^2=3x^2}$ $\rightarrow$ $3\cdot 3x^2+x^2=0$

$10x^2=0$

$\downarrow$

$x=0$

y si $\boxed{x=0 \Downarrow y=0}$

Pero el (0,0) está fuera del dominio de las funciones

f no puede ser derivable en ningún punto ya que de estas 3 condiciones no cumple la 3° para ningún $z_0 \in D$

① $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ✓

② u y v son dif en z_0 ✓

③ $u_x = V_y$, $u_y = -V_x$ cond de CR ✗

$\Rightarrow$ f no es holomorfa en ningún punto $\in D$ ya que si f fuera holom. en algún punto debería existir derivada en un entorno de éste y no ocurre aquí para ningún punto del dominio de f

---

$\frac{z}{1+iz} = -i\frac{(iz)}{1+iz} = -i\left(\frac{iz+1-1}{1+iz}\right) = -i\left(1-\frac{1}{1+iz}\right)$

$\frac{i}{1+iz} - i$

$\frac{1}{3!} +$

b) $f(z) = \frac{z}{1+iz}$

una transf es conforme en z_0 si es holom en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$

f es holomorfa por ser cociente de func enteras (polinomios complejos) salvo donde se anula el denominador

$DH(f) = \mathbb{C} - \{i\}$

y su derivada vale:

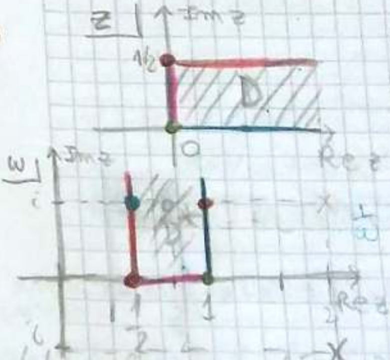
$f'(z) = \frac{(1+iz) - z \cdot i}{(1+iz)^2}$

$f'(z) = \frac{1}{(i(i+z))^2} = \frac{-1}{(z+i)^2}$

y su derivada es $\neq 0$ en todo su dominio de holomorfía menos en $-i$. $(DH(f))$

$\Rightarrow f(z)$ es conforme en $\mathbb{C} - \{i, -i\}$

Ahora busco la imagen de D por f:



$\omega = 1+iz \rightarrow z = \frac{\omega-1}{i} = i(1-\omega)$

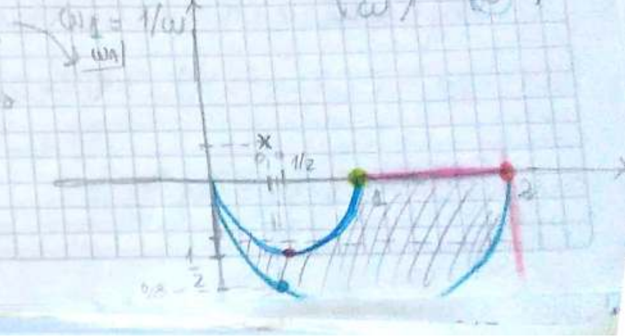
$f(z) = \tilde{f}(i(1-\omega)) = \frac{i(1-\omega)}{\omega}$

$\forall \omega \in D^* = \{1/2 < Re\, z < 1, Im(z) > 0\}$

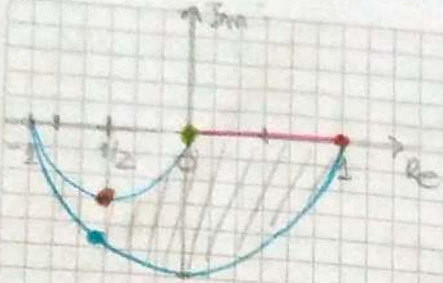
$f(z) = \tilde{f}(i(1-\omega)) = i\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) = i\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)$

(los bordes no están en D ni D*)

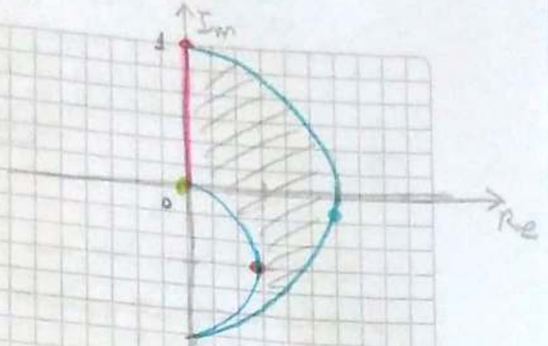
pero es + fácil ver que pasa con el paralelo



$\underline{w_3}$ | $w_3 = w_2 \cdot i$



$\underline{w_4}$ | $w_4 = w_3 \cdot i$



$\Rightarrow Img_f(z) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, -1 < Im\, z < 1,\ |z| < 1,\ |z - i| > 1/2 \right\}$

② $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son arm conj $\Rightarrow$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ } porque c/u es arm
$V_{xx} + V_{yy} = 0$ } $\rightarrow$ en A $\Rightarrow u$ y $V \in C^2$

es decir que c. cumple que: ~~todo~~ toda $f = u + iv$ } $u_x = V_y$, $u_y = -V_x$ } en A siendo u y V diferenciables en A.

$h(x,y)$ es armónica en A si:

$h_{xx} + h_{yy} = 0$

$h_x(x,y) = u_x \cdot v + u \cdot V_x$

$h_{xx}(x,y) = u_{xx} \cdot V + u_x V_x + u_x V_x + u \cdot V_{xx}$

$h_{yy}(x,y) = u_{yy} V + u_y V_y + u_y V_y + u\, V_{yy}$

$h_{xx} + h_{yy} = u_{xx} V + u_{yy} V + u_x V_x + u_y V_y + u_x V_x + u_y V_y + u V_{xx} + u V_{yy}$

$h_{xx} + h_{yy} = \underbrace{V(u_{xx} + u_{yy})}_{0} + u_x V_x + u_y V_y + u_x V_x + u_y V_y + \underbrace{u(V_{xx} + V_{yy})}_{0}$

$h_{xx} + h_{yy} = 2 u_x \underbrace{V_x}_{-u_y} + 2 u_y V_y$

$|-1|^{1/4} = \left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = 1$

$(-1)^{1/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = |-1|^{1/4} e^{i\frac{\arg(-1)}{4}}$ a

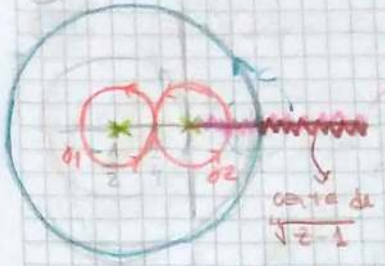
$e^{1/4 \log(-1)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\arg(-1)}{4}}$

$\arg(-1) = \pi$

$\Rightarrow 0 < \arg z < 2\pi$

③



corte de $\sqrt[4]{z}$

$$\frac{\sqrt[4]{z-1}}{4z(z+1/2)^2}$$

$\sqrt[4]{z-1}$ es $H(C)$ y $R_z(C)$

Por invariante homotópica:

$$\int_C \frac{\sqrt[4]{z-1}}{z(4z^2+4z+1)}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt[4]{z-1}}{4z(z+1/2)^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt[4]{z-1}\,dz}{4z(z+1/2)^2}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{\overbrace{\sqrt[4]{z-1}}^{}}{\underbrace{4z}_{g}\,(z+1/2)^2} = 2\pi i\ g'(-1/2)$$

$z^{1/4} = |z|^{1/4} e^{i\frac{\arg z}{4}}$

$z^{3/4} = |z|^{3/4} \cdot e^{i \arg(z) \cdot \frac{3}{4}}$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^{3/4} = \left|\frac{3}{2}\right|^{3/4} \cdot e^{i \arg(-\frac{3}{2}) \frac{3}{4}}$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4}$.

$$g'(z) = \frac{\frac{1}{4}(z-1)^{\frac{1}{4}-1} \cdot 4z - \sqrt[4]{z-1} \cdot 4}{16z^2}$$

$$g'(z) = \frac{1}{4(z-1)^{3/4}\,16z^2} - \frac{\sqrt[4]{z-1}}{4z^2}$$

$$g'(-1/2) = \frac{1}{4\,(-3/2)^{3/4} \cdot 16\,(-1/2)^2} - \frac{(-3/2)^{1/4}}{4\,(-1/2)^2}$$

$$g'(-1/2) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(-3/2)^{3/4}} - \frac{(-3/2)^{1/4}}{4}$$

$\frac{1}{3!}$

$$g'(-1/2) = \frac{1}{16}\ \frac{1}{(-3/2)^{3/4}} - \frac{(-3/2)^{3/4}}{4} \cdot \frac{4}{4}$$

$$g'(-1/2) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(-3/2)^{3/4}} - 4\,(-3/2)^{3/4}\right)$$

$$g'(-1/2) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(-1)^{3/4}\ (3/2)^{3/4}} - 4\,(-1)^{3/4} \cdot (3/2)^{3/4}\right)$$

$$(-1)^{1/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad \underbrace{(-1)^{1/4}(-1)^{1/4}}_{(1)^{1/4}} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=$$

discos perforados

⇓

El desarrollo centrado en el de Taylor

$$\frac{1}{3!} +$$

$$h(z) = z \cdot \frac{1}{(z+3)(z+1)} = z\left(\frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+1}\right) = z\left(\frac{A(z+1) + B(z+3)}{(z+3)(z+1)}\right)$$

$$= \frac{(A+3B) + (A+B)\cdot z}{(z-3)(z+1)}$$

$A+B=0 \rightarrow A=-B$

$A+3B=1$

$2B=1$

$B=1/2 \Rightarrow A=-1/2$

$$h(z) = z\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{z+3} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{\underline{z+1}+2} - \frac{1}{1+z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{2\left(\frac{z+1}{2}+1\right)} - \frac{1}{1+z}\right)$$

→ +1 así [illegible] en el −1

$$= \frac{1}{4}z\ \frac{1}{1+\left(\frac{z+1}{2}\right)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right) \rightarrow (z+1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$\frac{z}{1+z}$$

$$((z+1)-1)$$

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|z+1| < 2$$

$$\frac{z\,(z+1)^n}{2^n}$$

$$\frac{1}{z+1}\left(\frac{z}{z+3}\right) = \frac{1}{z+1}\left(\frac{z+3-3}{z+3}\right) = \frac{1}{z+1}\left(1 - \frac{3}{z+1+2}\right)$$

~~$\frac{1}{z+1}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right) = \sum \frac{1}{z+1}\left(1 + \sum\left(\frac{-z}{3}\right)^n\right)$~~ $\frac{1}{z+1}\left(1 - \frac{3}{2}\ \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}\right)$

$\frac{1}{3!}$ +

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{(z - z_k)}{e^{i\pi/z}-1} \cdot \frac{2z+1}{z^4} = ⊛$$

$$CA = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{e^{i\pi/z}-1} \underset{LH}{\overset{1}{=}} \lim_{z\to z_k} \frac{1}{e^{i\pi/z}\cdot\left(\frac{-i\pi}{z^2}\right)} = \frac{z_k^2}{\underbrace{\left(e^{i\pi 2k}\right)}_{\to -1}(-i\pi)} = \frac{i}{4k^2\pi}$$

$$\overset{⊛}{=} \lim_{z\to z_k} \frac{i}{4k^2\pi} \cdot \frac{\frac{1}{k}+1}{\frac{1}{16k^4}} = \frac{1+k}{k} \cdot \frac{i4k^2}{\pi} = \frac{i4k(1+k)}{\pi}$$

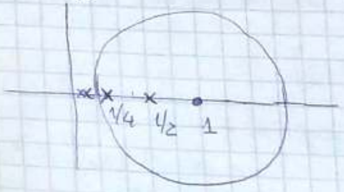
calculo $\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{g}{z^2}, 0\right)$ donde $g \overset{(w)}{=} f(1/z)$

$$-\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\left(\frac{(2+z)z^3}{e^{i\pi z}-1}\right)$$

$z=0$ es sing evitable de $g \Rightarrow \operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(\frac{-g}{z^2}, 0\right) = 0$

- Hallar $\int_C f(z)\,dz \quad C: |z-1| = 0{,}8$

f continua sobre C.



C encierra las sing $z_1 = \frac{1}{2}$

y $z_2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{i4(1+1)}{\pi} + \frac{i4\cdot 2(2+1)}{\pi}\right)$$

$$= -1\cdot 2\cdot 4(2+6) = -64$$

Si tienen sing evit no pasa nada si tocan la curva

- Hallar $\int_C f(z)\,dz \quad |z| = 18$

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \int_{C^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

Ejercicio que tenia mi homet.

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1/2)\right)$$

z=0 : sing aislado, polo orden 1.

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt[4]{z-1}}{4(z+1/2)^2} = \frac{\sqrt[4]{-1}}{4\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

z = -1/2 sing aislado, polo orden 2

$$\mathrm{Res}(f,-1/2) = \lim_{z\to -1/2} \frac{d}{dz}\left[(z+1/2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -1/2} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^{1/4}}{4z}\right)$$

$$= \lim_{z\to -1/2} \frac{\frac{1}{4}(z-1)^{-3/4}\cdot 4z - \sqrt[4]{z-1}\cdot 4}{16z^2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3/4}\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^{1/4}\cdot 4\right)\frac{1}{16\left(-1/2\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} e^{i3/4\pi}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right) e^{1/4 i\frac{\pi}{4}}4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3}{2}\right)^{-3/4} = \left|-\frac{3}{2}\right|^{3/4} e^{i\arg(-3/2)\cdot(-3/4)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} e^{i\pi/4}$$

de aquí necesito determinar la rama del log, donde mido el arg.

$$z^{1/4} = |z|^{1/4}\cdot e^{i\arg z\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$(-1)^{1/4} = |-1|^{1/4} e^{i\arg(-1)\frac{1}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1\cdot e^{i\pi/4}$$

$$\arg(-1)\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

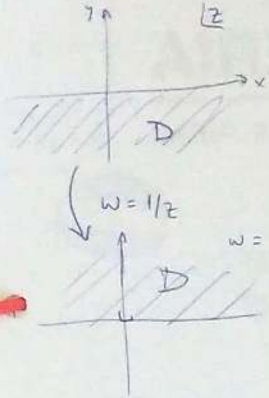
$$\arg(-1) = \pi$$

$$\Rightarrow 0 < \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1+3z}{2+z} = 1}$$

$\frac{1}{3!}$ +

$D = \{ z = x+iy \ / \ y \leq 0 \}$



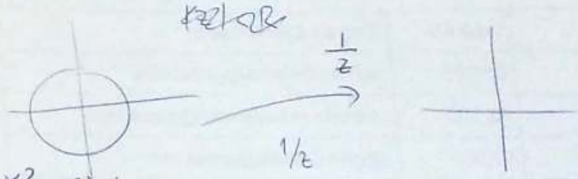
$$w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D = \left\{ w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \ / \ y \leq 0 \right\}$$

Re

$\mathrm{Re}(w) \leftarrow$ nope $= \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{-y}{x^2+y^2} \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(w) \geq 0$$



$$a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$$

$$\frac{\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2}{b^2} = R^2$$

con 3 puntos se puede descubrir una única circunf.

A

res

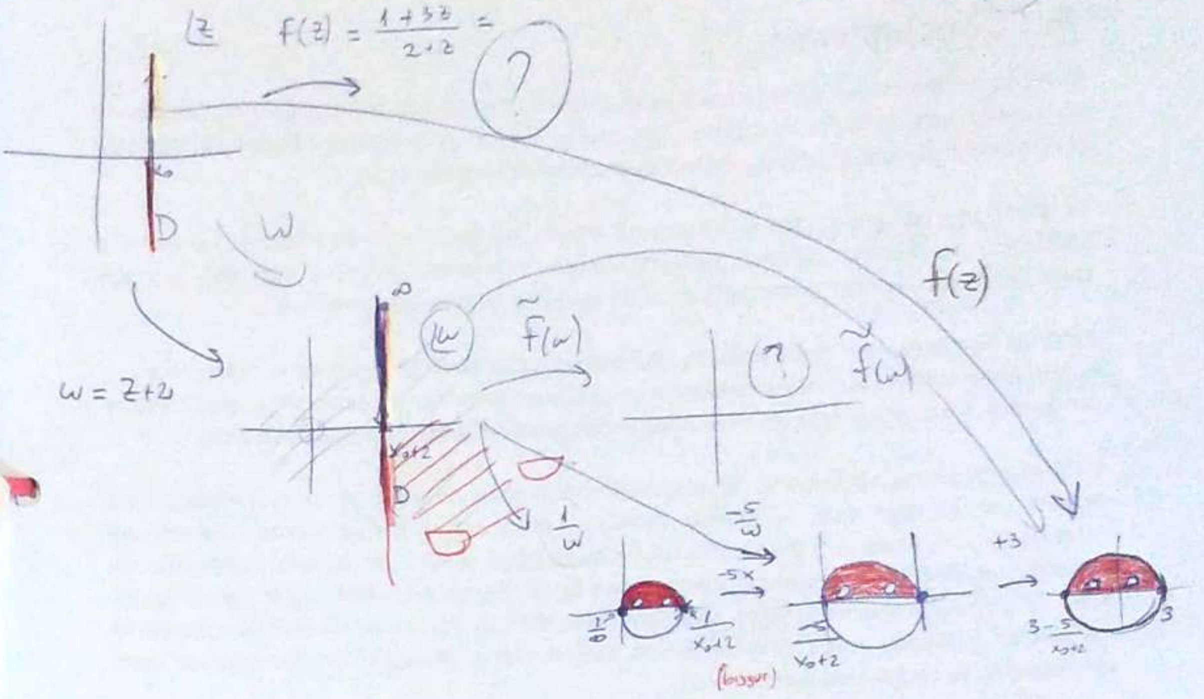
está acotado,

converger.

zn - z| < ε

$x = cte$: $D = \{ z = x_0 + iy \ / \ y \in \mathbb{R} \}$

$f(z) = \tilde{f}(w) = \frac{-5}{w} + 3$



$-i$

0

Singularidades

$$h(z) = \frac{Log\,(z+1) - z}{z3\,(z+i)} = \overbrace{\frac{Log\,(z+1)}{z^3(z+i)}}^{f1(z)} - \overbrace{\frac{z}{z3\,(z+i)}}^{f2(z)}$$

$\frac{1}{3!}$

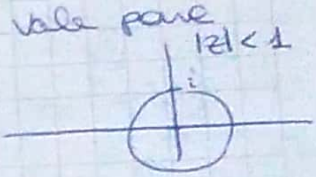
Para $\boxed{z_0=0}$

$$m(z) = \frac{Log\,(1+z)}{(z+i)}$$

Busco DST alrededor de $z_0=0$ (forma de)
ya que es holomorfa allí.

$$m(z) = m(0) + m'(0)\,z + \frac{m''(0)}{2!} z^2 + \ldots$$

Vale para $|z|<1$



el DSL de $f(z)$ en $z_0=0$ es

$$\Rightarrow f_1(z) = \frac{m(z)}{z^3} = \frac{\overset{0}{m(0)}}{z^3} + \frac{\overset{-i}{m'(0)}}{z^2} + \underbrace{\frac{m''(0)}{2!\,z}}_{\frac{-1-i}{2!\,z}} + \ldots$$

en $0<|z|<1$

calculo $m(z)$, $m'(z)$ y $m''(z)$
$m'(0)$ $m''(0)$

$m(0) = 0$ $\qquad m'(z) = \dfrac{\frac{1}{z+1}\cdot(z+i) - Log\,(1+z)}{(z+i)^2}$

$$= \frac{z+i - Log(1+z)(1+z)}{(z+i)^2(z+1)} = \frac{\frac{z+i}{z+1}}{(z+i)^2} - \frac{Log\,(1+z)}{(z+i)^2}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(z+i)\,(z+1)}_{z^2+(1+i)z+i}} - \frac{Log(1+z)}{(z+i)^2}$$

$$m'(0) = -i$$

$$m''(z) = \frac{\text{[illegible]} - (2z + 1+i)}{(z+i)^2(z+1)^2} - \left[\frac{\frac{1}{1+z}\cdot(z+i)^{\textcircled{2}} - Log(1+z)\,2\,(z+}{(z+i)^{4/3}}\right.$$

queda 1

$-z \;\; -(z+i)$

$$m''(z) = \frac{\text{[illegible]} - 2z - 1 - i}{[(z+i)\;(z+1)]^2} - \left[\frac{1\,(z+1)}{(1+z)(z+i)^3} - \frac{Log(1+z)\,2}{(z+i)^3}\right]$$

$m''(0) = -1-i$

DSL $f_1(z) \to f_1(z) = \frac{0}{z^3}\frac{-i}{z^2}+\frac{-1-i}{2!z}+\cdots$ en $0<|z|<1$

Para $z_0=0$ →

$$m_2''(z) = -i\left(\frac{-1\cdot 2z}{(z+i)^3}\right) = \frac{z}{(z+i)^3}$$

$$m_2(z) = \frac{-z}{z+i} \qquad m_2'(z) = \frac{-1\cdot(z+i)-(-z)\cdot 1}{(z+i)^2} = \frac{-i}{(z+i)^2}$$

$m_2(z)$ admite DST $\underset{0}{\text{en}}$ en $|z|<1$

$$m_2(z) = \underbrace{m_2(0)}_{0} + \underbrace{m_2'(0)}_{i}(z) + \underbrace{m_2''(0)}_{0}\frac{z^2}{2!}+\cdots \text{ en } |z|<1$$

⇓

$$f_2(z) = \frac{m_2(0)}{z^3} + \frac{i}{z^2} + \frac{0}{z^1 2!} \text{ admite DSL en } 0<|z|<1$$

$$f_2(z) = \frac{0}{z^3} + \frac{i}{z^2} + \frac{0}{2!z}$$

∴ el DSL de $f(z)$ en $z_0=0$ es:

$$f(z) = \frac{0+0}{z^3} + \frac{0}{z^2} + \frac{-1-i+0}{2!z}$$

en $0<|z|<1$

⇒ puesto que a_{-1} es el residuo en $z_0=0$

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} f(z) = \frac{-1-i}{2!}$$

Pide sing y residuos en c/u

La función $h(z) = \frac{\text{Log}(1+z)-z}{z^3(z+i)}$ tiene como sing

$z_0=0$
$z_1=-i$
$z_2=\infty$

$\frac{1}{3!}$

Para calcular el valor del $\operatorname*{Res}_{z_0=0} f(z)$ y $\operatorname*{Res}_{z_1=-i} f(z)$ trabajaré con el DSL de $h(z)$ en cada caso (así además clasifico el tipo de sing).

Dividiré a $h(z)$ en 2 funciones para trabajar con $z_0=0$

$h(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}$ donde $\varphi(z) = \frac{\text{Log}(1+z)-z}{z+i}$ que es holomorfa en $z_0=0$ $\overset{\Rightarrow}{y}$ admite DST en $z_0=0$.

El DST para $\varphi(z)$ alrededor de $z_0=0$ puede expresarse como:

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \varphi'(0)z + \frac{\varphi''(0)}{2!}z^2 + \frac{\varphi'''(0)z^3}{3!}+\cdots$$

con $|z|<1$ ya que tiene sing en $-i$.

⇒ el DSL para $h(z)$ alrededor de $z_0=0$ será:

$$h(z) = \frac{\varphi(0)}{z^3} + \frac{\varphi'(0)}{z^2} + \boxed{\frac{\varphi''(0)}{2!z}} + \frac{\varphi'''(0)}{3!}+\cdots$$

con $0<|z|<1$ ya que tiene sing en $-i$ y 0.

$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0=0} h(z)$

Y me interesa tmb ver dónde se anule $h(z)$ para determinar si es un polo o qué tipo de sing sea, como apelo a que sea polo recurrí a este método

Calculo $\varphi'(z)$ y $\varphi''(z)$

$$\varphi'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{Log}(z+1)-z}{(z+i)}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{Log}(z+1)-z}{z+i}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z+1}-1\right)(z+i) - (\mathrm{Log}(z+1)-z)(1)}{(z+i)^2} \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{z+1}-1\right)\frac{1}{z+i} - \frac{(\mathrm{Log}(z+1)-z)}{(z+i)^2}$$

$$\varphi'(z) = \left(\frac{1-(z+1)}{z+1}\right)\frac{1}{z+i} - \frac{(\mathrm{Log}(z+1)-z)}{(z+i)^2}$$

$$= \frac{-z(z+i)}{(z+1)(z+i)^2} - \frac{(\mathrm{Log}(z+1)-z)(z+1)}{(z+i)^2(z+1)}$$

$$\varphi'(z) = \frac{\cancel{z^2} - iz - z\mathrm{Log}(z+1) - \mathrm{Log}(z+1) + \cancel{z^2} + z}{(z+i)^2(z+1)}$$

$$= \frac{(-i+1)z - (z+1)\mathrm{Log}(z+1)}{(z+i)^2(z+1)}$$

$$= (-i+1)\frac{z}{(z+i)^2(z+1)} - \frac{\mathrm{Log}(z+1)}{(z+i)^2}$$

$\mathrm{Log}(z+1)\cdot 2(z+i)$

$$\varphi''(z) = (-i+1)\left[\frac{1\left[(z+1)(z+i)^2\right] - z\frac{d}{dz}\left((z+i)^2(z+1)\right)}{\left((z+i)^2(z+1)\right)^2} - \frac{\left[\frac{(z+i)^2}{z+1} - \mathrm{Log}(z+1)2z\right]}{(z+i)^{\cancel{2}4}}\right]$$

$$\varphi''(z)\Big|_0 = (-i+1)\left[\frac{-1-0}{\underbrace{-1}_{1}} - \frac{(-1)}{(-1)}\right] \times$$

$\frac{1}{3!}$ +

Ceros de funciones holomorfas

z_0 es cero de f si $f(z_0)=0$. Es un cero aislado de f si existe un entorno de z_0 / $f(z_0) \neq 0$ ∀ z en ese entorno, $z \neq z_0$

Teorema: Los ceros de una función holomorfa no nula son aislados.

Demostración: Sea z_0 un cero de f, f holomorfa, $f(z_0)=0$

Como f es holom ⇒ admite DST en z_0

$$\text{DST: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Sea N / $f^N(z_0) \neq 0$ y $f^K(z_0) = 0$, $K = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \frac{f^N(z_0)(z-z_0)^N}{N!} + \frac{f^{(N+1)}(z_0)(z-z_0)^{N+1}}{(N+1)!} + \ldots$$

↑ como el resto valen 0.

$$= (z-z_0)^N \underbrace{\left(\frac{f^N(z_0)}{N!} + \frac{f^{N+1}(z-z_0)}{(N+1)!} + \frac{f^{N+2}(z-z_0)^2}{(N+2)!} + \ldots\right)}_{\text{serie de potencias, es func holom } \varphi(z)}$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^N \cdot \varphi(z) \qquad \text{como } \varphi(z_0) = \frac{f^N(z_0)}{N!} \neq 0$$

$$\Downarrow \qquad \underbrace{\text{y } \varphi \text{ es continua}}$$

$f \neq 0$ en un entorno de z_0.

$$\Downarrow$$

$\varphi(z) \neq 0$ en un entorno de z_0

Principio de Identidad

Sean f y g holomorfas en D

Sea $D_0 = \{z \in D \,/\, f(z) = g(z)\}$ si D_0 tiene algún punto no aislado ⇒ $f(z) = g(z)$ ∀ $z \in D$

$$\boxed{\text{Demostración}}:$$

Sea $h(z) = f(z) - g(z)$, h es holom en D

$h(z)=0$ en D_0 ⇒ h tiene algún cero no aislado

⇒ h tiene que ser $h=0$ en D ⇒ $f=g$

Ejemplo: $f = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$, $g = 1$ ambos son func enteras

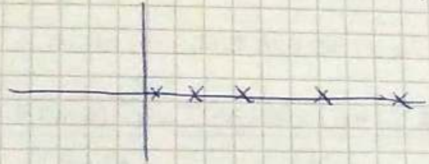
Si $z = x \in \mathbb{R}$, $f(z) = g(z)$

$D_0 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = x, x \in \mathbb{R} \}$ → todos puntos no aislados

→ $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ ⟶ $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 2:

$\exists$ f entera / $f(1/n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$



$f(0)=0$ por ser f continua.

$z_0 = 0$ es un cero no aislado

⇒ la única func que cumple es $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 3:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \operatorname{sen}(1/z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

¿es holomorfa en $z=0$?

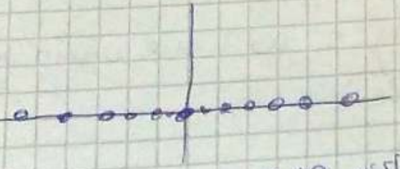
Si $z \neq 0$, $\underbrace{f \text{ es holom}}_{\text{compos de func holomorfas}}$, f no es nula

Ceros de f:

- $z = 0$
- $z \neq 0$, $z^2 \operatorname{sen}(1/z) = 0 \leftrightarrow \operatorname{sen}(1/z) = 0$

$\leftrightarrow \frac{1}{z} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\leftrightarrow z = \frac{1}{k\pi}$



→ $z=0$ es un cero no aislado → f no puede ser holom en todo $\mathbb{C}$ → f no es holom en 0

---

25. Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de z para las siguientes funciones, de modo que sea convergente en los puntos z_0 indicados. Especificar el dominio de convergencia de la serie calculada.

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2-2z-3}$ $z_0 = 2$ ✓ HC (ii) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-6z+5}$ $z_0 = -8$ ✓

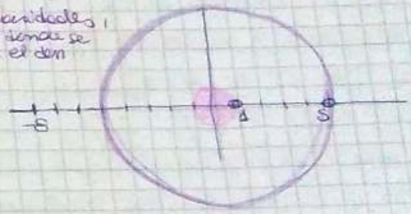
$\frac{1}{3!}$ +

㉕ ii) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-6z+5} = \frac{2z+1}{(z-5)(z-1)}$

convergente en $z_0 = -8$

$D_f = \mathbb{C} - \{5, 1\}$ → singularidades, puntos donde se anula el den

Si quiero que sea conv en $z_0 = -8$ busco que sea conv en $|z| > 5$ ya que



f(z) admite 3 posibles desarrollos de Laurent:

$D_1 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 \leq |z| < 1 \}$

$D_2 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 1 < |z| < 5 \}$

$D_3 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > 5 \}$ → aquí se encuentra -8

Buscamos el desarrollo en fracciones sples de f(z):

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-5)(z-1)} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+B(z-5)}{z^2-6z+5}$$

$$= \frac{(A+B)z + (-A-5B)}{z^2-6z+5}$$

$A + B = 2$ ⟶ $A + \frac{1}{5} + \frac{A}{5} = 2$

$-A - 5D = 1$

$5B = 1 + A$

$B = \frac{1+A}{5}$

$\frac{6}{5} A = 2 - \frac{1}{5}$

$\frac{6}{\cancel{5}} A = \frac{9}{\cancel{5}}$

$\boxed{A = \frac{3}{2}}$ → $\boxed{B = \frac{5/2}{5} = 1/2}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{(z-5)}}_{h(z)} + \underbrace{\frac{3}{2} \frac{1}{(z-1)}}_{g(z)}$$

$\frac{1}{2} 5^n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$

$$h(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z(1-5/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{z} \left(\frac{5}{z}\right)^n$$

↓ $\left|\frac{5}{z}\right| < 1$

$5 < |z|$

$|z| > 5$

$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$g(z) = \frac{3}{2} \frac{1}{z(1-1/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \forall z / |z| > 1$$

Luego f(z) tiene desarrollo de Laurent alrededor de ∞:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} 5^n + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

(iii) $f(z) = \frac{3z-1}{z^2-4z+3}$ $z_0 = -2$

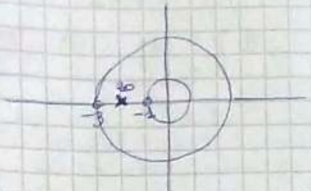
Las sing de $f(z)$ son los puntos / $z^2-4z+3=0$ $<$ $z_1=-1$, $z_2=-3$

⇒ existen 3 posibles desarrollos de Laurent de $f(z)$ "alrededor del 0":

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq |z| < 1\}$

$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 3\}$

$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 3\}$



en este caso si debe converger en $z_0=-2$ voy a buscar el DSL en D_2 que es donde está incluido dicho punto.

$$f(z) = \frac{3z-1}{z^2-4z+3} = \frac{3z-1}{(z+1)(z+3)}$$

Busco su descomposición en fracciones simples:

$$= \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+3)} = \frac{A(z+3)+B(z+1)}{z^2-4z+3} = \frac{(A+B)z+3A+B}{z^2-4z+3}$$

$A+B=3$

$3A+B=-1$

$B=-1-3A$

$A-1-3A=3$

$-2A=4$

$\boxed{A=-2}$

$B=-1-3\cdot(-2)=-1+6$
$=5$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{-2}{(z+1)}}_{h(z)} + \underbrace{\frac{5}{(z+3)}}_{g(z)}$$

$$h(z) = -2\frac{1}{z(1+1/z)} = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(-\left(\frac{1}{z}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}(-1)^n \quad \text{si } |z|>1$$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$1<|z|$

$$g(z) = 5\frac{1}{z+3} = 5\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{z}{3}\right)\right)^n \text{ si } |z|<3$$

$\left|\frac{z}{3}\right|<1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{z}{3}\right)\right)^n\frac{5}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\frac{5}{3^{n+1}}$$

Luego el DSL para todo $z \in D_2$ será la suma de ambos desarr $h(z)$ y $g(z)$ en su dom intersección (que es D_2)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-2)\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \frac{(z)^n 5}{(3)^{n+1}}\right](-1)^n$$

Pág de Marchant

Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de z para la función $f(z) = \frac{3z-1}{z^2-4z+3}$ de modo que sea conv en $z_0=-2$

$\frac{1}{3!}$ +

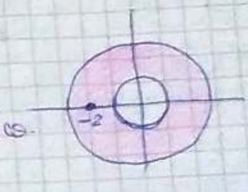
Las sing. de $f(z)$ son los puntos / $z^2-4z+3=0$ o sea $z_1=1$, $z_2=3$

⇒ ∃ 3 posibles desarrollos de Laurent de $f(z)$:

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq |z| < 1\}$

$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 3\}$ ← este busco.

$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 3\}$



Buscamos el desarrollo de $f(z)$ en fracciones simples.

$$f(z) = \frac{3z-1}{z^2-4z+3} \overset{\frac{A}{(z-3)}+\frac{B}{(z-1)}}{=} \frac{A(z-1)+B(z-3)}{(z-1)(z-3)} = \frac{Az+Bz+(-A-3B)}{(z-1)(z-3)}$$

$$= \frac{z(A+B)+(-A-3B)}{(z-1)(z-3)}$$

$A+B=3$

$-A-3B=-1$

$A+3B=1$

$3B=1-A$

$B=\frac{1-A}{3}$

$A+\frac{1-A}{3}=3$

$A+\frac{1}{3}-\frac{A}{3}=3$

$A-\frac{A}{3}=3-\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}A=\frac{8}{3}$

$\boxed{A=4}$

$\boxed{B=\frac{1-4}{3}=\frac{-3}{3}=-1}$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{4}{z-3}$$

afuera ⇒ saco factor común z.

$$h(z) = \frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z(1-1/z)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$ o sea $1<|z|$

adentro ⇒ Saco factor común 3

$$g(z) = \frac{4}{z-3} = \frac{-4}{3(1-z/3)} = -\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{3}\right)\left(\frac{z}{3}\right)^n, |z|<3$$

$\left|\frac{z}{3}\right|<1 \to |z|<3$

Luego $f(z)$ convergerá en la ∩ de ambos dominios

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{3}\right)\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$\forall z \in D_2$

19. (a) Desarrollar las siguientes funciones en serie d

z_0 indicado:

(i) $\exp z \quad z_0=0, \quad z_0=\pi i$ ● (ii) $\frac{1}{z-1}$ ●

(iii) $\operatorname{sen} z \quad z_0=0, \quad z_0=\pi$ ●

Recordar: $\boxed{\text{Teorema de Taylor}}$ • f es H(D), D abierto

$$\Downarrow$$

f es desarrollable en SP con centro $z_0 \in D$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Big/ c_k=\frac{f^{k}(z_0)}{k!}$$

i) $f(z)=e^z$

$f(\pi i)=e^{\pi i}$

$f'(\pi i)=e^{\pi i}$

$\vdots$

$f^{k}(\pi i)=e^{\pi i}$

$$c_k=\frac{e^{\pi i}}{k!} \Rightarrow e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\pi i}}{n!}(z-\pi i)^n$$

iii)

$f(z)=\operatorname{sen}(z) \quad f(\pi)=0 \quad c_0=0$

$f'(z)=\cos(z) \quad f'(\pi)=-1 \quad c_1=-1$

$f''(z)=-\operatorname{sen}(z) \quad f''(\pi)=0 \quad c_2=0$

$f'''(z)=-\cos(z) \quad f'''(\pi)=\frac{1}{3!} \quad c_3=1$

$$\operatorname{sen}(z)=0+\frac{(-1)}{1!}(z-\pi)+\frac{1}{3!}(z-\pi)^3+\cdots=-\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)^n(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ii) $z_0=-i$

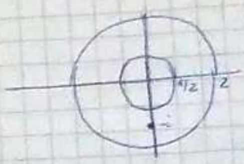
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1-i+i}=\frac{1}{-i-1+z+i}=\frac{-1}{i+1}\,\frac{1}{1+\frac{z+i}{-i-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i+1}\right)\left(-\frac{z+i}{-i-1}\right)^n$$

$$\left|\frac{z+i}{-i-1}\right|<1 \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{(i+1)^{n+1}}\right)(z+i)^n$$

$$|z+i|<|-i-1|$$

$$|z+i|<\sqrt{2}$$

(iv) $f(z)=\underbrace{\frac{2z^2}{2z^2-5z+2}}_{\gamma(z)}+\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{z^2}\right)}_{\varphi(z)} \quad z_0=-i \quad z_0=\infty$



$\frac{1}{3!}$ +

$\gamma(z)$ tiene singularidades en 2 y 1/2

$\varepsilon(z)$ " " en ∞

Voy a buscar qué ocurre en la corona.

$$\varphi_c(z)=\operatorname{sen}\left(\frac{3}{z^2}\right)=\operatorname{sen}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (w)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{z^2}\right)^{2n+1} \; ⊛$$

$$\gamma(z)=\frac{z^2}{z^2-5/2z+1}=\frac{z^2}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

pero no son polinomios del mismo grado, se va a fuera entonces

$$=z^2\left(\frac{1}{(z-2)(z-1/2)}\right)=z^2\left(\frac{A}{z-1/2}+\frac{B}{z-2}\right)$$

esta fuera que consigo fuera

esta por dentro

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-2/z)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1/2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$\left|\frac{1/2}{z}\right|<1$$

$$|z|>1/2$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2(1-z/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$A=-\frac{4}{3}$

$B=2/3$

$$\gamma(z)=z^2\left(A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z}\right)^n+B\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cancel{z}\right)^n\right)$$

$$=A\sum_{n=0}^{\infty}z\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n+B\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n z^2}_{-\frac{1}{2}\frac{z^{n+2}}{2^n}}=A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}$$

$$-B\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{n+2}$$

$$\gamma(z)=\frac{1}{3}\left(-4\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}-2\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}-\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{n+2}\right)$$

habría que juntarlo todo y ponerlo con ⊛

⑬ (b) A partir de (a), obtener el desarrollo en serie de Taylor centrado en z_0 de:

(i) sh z $\quad z_0=\pi i$ $\quad z_0=0$ ● (ii) $\frac{1}{(z-1)^2}$ $\quad z_0=0$ ✓ $\longrightarrow f(z)=F'(z) \,/\, F(z)=\left(\frac{1}{z-1}\right)=\sum_0^\infty z^n \quad |z|<1$

(iii) cos z $\quad z_0=\pi$ ● (iv) $\mathrm{Ln}(\frac{1}{z-1})$ $\quad z_0=i$ ● $\quad \sum_0^\infty n z^{n-1} \quad |z|<1$

(c) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto z_0 indicado, recurriendo a un cambio de variable conveniente:

(i) $\mathrm{sen}(\overset{w}{\overbrace{2z+1}})$ $\quad \overset{w_0=-1/2}{z_0=0}$ (ii) sen z $\quad z_0=\frac{\pi}{4}$ (iii) $\exp(\overset{w}{z^2})$ $\quad z_0=0$

¿Qué tiene de raro?

$\boxed{\text{con } z_0=0}$

$$i)\ \mathrm{sh}(z)=-i\,\mathrm{sen}(iz)=\frac{\mathrm{sen}(iz)}{i}=\frac{\mathrm{sen}(w)}{i}=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(w)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\boxed{w=iz}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i}\frac{(-1)^n(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si es par} \\ \frac{(-1)}{n!} & \text{si es impar} \end{cases}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z)^{2n+1}\cdot i^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z)^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(\pi i)\ \mathrm{sh}(\pi i)=-i\,\mathrm{sen}(i\pi i)$

$=-i\,\mathrm{sen}(-\pi)$

$=0$

$f'(\pi i)\ \mathrm{ch}(\pi i)=\cos(i\pi i)=\cos(-\pi)=-1$

$c_0=0$

$c_1=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n+1)!}(z-\pi i)^{2n+1}$$

$$iii)\ \frac{d}{dz}\,\mathrm{sen}\,z=\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z)^{2n}}{(2n)!}$$

en 0

salió $\frac{1}{\ }$ para $z_0=0$

$f(\pi)=\cos(\pi)=-1$

$f'(\pi)=-\mathrm{sen}(\pi)=0$

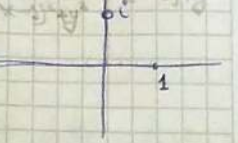
$f'''(\pi)=-\cos(\pi)=1$

$f''''(\pi)=\mathrm{sen}(\pi)=0$

pero tenía el desarrollo del seno en π!

$$\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

$$iv)\ \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{z-1}\right),\ D_H=\mathbb{C}-\{z\in\mathbb{C}\,/\,z=x\le 1\}$$



↓ derivo

centrar en i

$$(z-1)\cdot\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{-1}{z-1}=\frac{-1}{z-i+i-1}=\frac{-1}{(i-1)+z-i}=\frac{-1}{i-1}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{i-1}}$$

$$=\frac{-1}{i-1}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i-1}\right)}=\frac{-1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i-1}\right)^n\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i-1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{z-i}{i-1}\right)^{n+1}+\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\pi-1}\right)$$

$\left|\frac{z-i}{i-1}\right|<1 \to |z-i|<\sqrt{2}$ pero agregarle la otra restricción, la de D_H.

$\frac{1}{3!}$ +

$\boxed{\text{Singularidades}}$

- z_0 es singularidad de f si f no es holomorfa en z_0 pero sí en algún punto de todo entorno.
- z_0 es sing aislada de f si z_0 es sing de f pero f es holomorfa en $B(z_0,\varepsilon)$ para algún $\varepsilon>0$

Ej $\quad f(z)=\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ $\quad$ singularidad $z_0=0$, es aislada

$f(z)=\frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ $\quad$ sing no aislada $z_0=0$ y tmb los puntos / $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right)=0$, $z_n=\frac{1}{\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$

(sing aisladas)

$f(z)=\mathrm{Log}(z)$ $\quad$ sing $z=x$, $x\le 0$, no aisladas

$f(z)=\frac{1}{\mathrm{sen}(z)}$ $\quad$ sing $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Clasificación de sing aisladas}}$

Si z_0 es sing aislada, f es holomorfa en $B(z_0,\varepsilon)$

$\Rightarrow f$ admite DSL en potencias de $z-z_0$ allí.

$\boxed{\text{Continuar inciso c}}$

$\mathrm{sen}(2z+1)=\mathrm{sen}(w)$

en $z_0=0$ $\quad$ en $w_0=1$

$\mathrm{sen}(1)$ = no da lindo

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{parte ppal de SL}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad \forall z\in B(z_0,\varepsilon)$$

- Si $b_n=0\ \forall n \Rightarrow z_0$ es sing evitable
- Si $b_n=0\ \forall\ n=n+1,n+2,\dots\Rightarrow$ z_0 es polo de orden n (es la parte ppal de $z-z_0$ + <0 que sale)

parte de pot negativas no nulas
- Sing esencial

Proposición

Sea z_0 una sing aislada $\Rightarrow$

Si $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = L \Rightarrow z_0$ es sing evitable (L, finito.)

Si $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$ sing esencial

Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ polo.

Teorema del orden del polo

Sea $f(z)$ y $n \in \mathbb{N}$ | $\exists$ z_0 sing aislada y $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = L$, L finito $\neq 0$

$\Longleftrightarrow$

z_0 e polo de orden n de $f(z)$

Función meromorfa: funciones cuyas únicas sing son polos.

Singularidad en ∞

Si ∞ es sing aislada de $f \Leftrightarrow f(1/t)$ tiene sing aislada en $t=0$

Def: f tiene en ∞ un polo de orden n si $f(1/z)=g$ tiene un polo de orden n en 0.

Ejemplos:

- $f(z)=1/z$ tiene sing evitable en ∞
- $m(z)=\frac{1}{sen(z)}$ no tiene sing aislada en ∞
- $g(z)=e^{z}$ tiene sing esencial en ∞
- $p(t)$ no cte tiene polo en ∞.

Singularidades. Teorema de los residuos.

1. Hallar y clasificar las singularidades en $\mathbb{C}^*$ de:
(a) $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)(z+2)}$ (b) $f(z)=\frac{(z+1)^2}{(z-1)(z+2)}$ (c) $f(z)=e^{\frac{1}{z-2}}$

a) $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}=\frac{z+1}{(z-1)(z+2)}$ 1 y -2 son ceros de $g(z)$

Las sing de $f(z)$ son $z_1=1$, $z_2=-2$, $z_3=\infty$ $\rightarrow$ son aisladas ya que $\exists$ $B(z_1,R_1)$ / $R_1>0$ y $B(z_2,R_2)$ / $R_2>0$ donde f es holom (sin z_1) (sacando a z_1)

Analizo $z_1=1$

$\lim_{z\to 1} \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} = \infty$

$\lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{z+1}{\cancel{(z-1)}\, z+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow z_1=1$ es polo de 1° orden de $f(z)$

Analizo $z_2=-2$

$\lim_{z\to -2} f(z) = \infty$

$\lim_{z\to -2} (z-2) f(z) = 3 \Rightarrow z_2=-2$ es polo de 1° orden de $f(z)$

Analizo qué tipo de sing es $t=0$ en $m(t)=f(1/t)$

$\lim_{t\to 0} \frac{1/t+1}{(1/t-1)(1/t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1+t}{\cancel{t}}}{\frac{1-t}{\cancel{t}}\cdot\frac{1+2t}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{1}{(1+t)}\,\overset{0}{t}}{\underbrace{(1-t)}_{1}\underbrace{(1+2t)}_{1}} = 0$

$\therefore$ como $f(1/t)$ tiene sing evitable en $t=0 \Rightarrow f(z)$ tiene sing evitable en $z=\infty$

en b) el resultado del orden de los polos es "idéntico", cambia la sing en ∞?

$\lim_{t\to 0} \frac{(1/t+1)^2}{(1/t-1)(1/t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\overset{1}{(1+t)}^2}{\cancel{t^2}}}{\frac{\overset{1}{1-t}}{\cancel{t}}\cdot\frac{\overset{1}{1+2t}}{\cancel{t}}} = 1$ $\Rightarrow f(1/t)$ tiene tmb sing evitable en $t=0$ $\therefore f(z)$ tiene sing evit en $z=\infty$.

c) $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ tiene sing en $z_1 = 2$

Analizo la sing:

$$\lim_{z\to 2} e^{\frac{1}{z-2}} = \lim_{w\to 0} e^{\frac{1}{w}} = \lim_{w\to 0} e^{\frac{\overline{w}}{|w|^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

Si tomamos por el camino C_1: $y=0$ $(z = x+i0)$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} e^{1/x}(1-i0) = \lim_{x\to 0} e^{1/x} \begin{cases} \longrightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \\ \longrightarrow \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \end{cases} \Big\rangle \neq$$

$\Rightarrow \nexists \lim$ $\therefore$ $\boxed{z_1 = 2 \text{ es sing esencial}}$

(d) $f(z) = z\,\mathrm{ctg}(z)$

$f(z) = \dfrac{z\cos(z)}{\mathrm{sen}(z)}$ tiene sing en 1) $z /$ $\mathrm{sen}(z) = 0$ → $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ → sing aisladas

2) $z = \infty$

Analizo en $z_k = k\pi$

$$\lim_{z\to k\pi} \frac{z\cos(z)}{\mathrm{sen}(z)} = \infty$$

→ siempre ≠0 ⇒ no me influye, busco el límite difícil

si $k \neq 0$

$$\lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)\frac{z\cos(z)}{\mathrm{sen}(z)} = (-1)^k \cdot k\pi \cos k\pi \neq 0$$

$$\lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)}{\mathrm{sen}(z)} \text{ da } \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)}{\mathrm{sen}(z)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\cos(z)} = (-1)^k \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ es par} \\ -1 \text{ si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

$\frac{1}{3!}$ +

(e) $f(z) = \dfrac{z}{2 + \mathrm{sen}\, z}$ (f) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(1 - \mathrm{ch}\, z)}$ → $\boxed{\text{HC}}$

e) sing en z_1: $\mathrm{sen}(z) = -2 = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -2$

$z_2 = \infty$

$$\downarrow$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = -4i$$

$$e^{iz} - e^{-iz} + 4i = 0$$

$$e^{2iz} - 1 + 4i\,e^{2iz} = 0$$

$\Rightarrow w = e^{iz}$

$$w^2 + 4iw - 1 = 0$$

$$w = \frac{-4i \pm \sqrt{(4i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \frac{-4i \pm i\sqrt{12}}{2}$$

$$w = -2i \pm i\sqrt{3}$$

$$e^{iz} = (-2 \pm \sqrt{3})\,i$$

$$e^{i(x+iy)} = \underbrace{(-2 \pm \sqrt{3})}_{|e^{iz}|} e^{i\pi/2} = e^{-y}e^{ix} \rightarrow (2 \mp \sqrt{3})\,e^{i\pi}e^{i\pi/2} = e^{-y}e^{ix}$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$y_{1,2} = -\ln(-2 \pm \sqrt{3})$

$$\Rightarrow z_{1k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\left(-\ln\left(-2 + \sqrt{3}\right)\right)$$

$$z_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\left(-\ln\left(-2 - \sqrt{3}\right)\right)$$

$\Big\rangle$ imposibles

(g) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z}} - 1}$ $\boxed{\text{HC}}$ (h) $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}\, z}{z\,(z-\pi)^2}$ (i) $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{e^{-2z} + 9}$ → parecido al g-

(j) $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}(z^2 - i)}$ → Recordar logaritmo es $2\pi i$ periódico

→ Hacer si se necesita + práctica

3. Probar que f tiene un polo de orden menor o igual que $m \in \mathbb{N}$ en z_0, si y sólo si $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0.

1°) f polo de orden $\overset{n}{\leq} m$ en $z_0 \Rightarrow g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ tiene sing evitable en z_0.

Dem:

f tiene polo de orden $n \leq m$

$\Rightarrow$ es una sing aislada y además su DSL:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \qquad \frac{a_{-n+d}}{(z-z_0)^m}$$

de donde

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-m} + a_{-(n-1)}(z-z_0) + \cdots + a_0(z-z_0)^n + \cdots$$

$\therefore \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = a_{-n}$ donde $a_{-n} \neq 0 \neq \infty$

$\Rightarrow$ para la igualdad se cumple

¿qué ocurre con $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$? si $m = d+n$, $d \geq 0$

$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m$ $\Rightarrow$ $g(z)$ tiene sing evitable en z_0.

$(z-z_0)^n (z-z_0)^d$

2°) $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = L$ $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = L$ $\quad d \geq 0$

sing evitable. $\quad m = d+n$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \overset{L_1}{(z-z_0)^d} \overset{L_2}{(z-z_0)^m f(z)} = L$$

$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = L_2$

si $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ polo orden m

$g(z_0) = 0$, orden d, $g(z) = (z-z_0)^d \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow f$ tiene un polo de orden $n \leq m$ en z_0.

$$f = \frac{(z-z_0)^d}{(z-z_0)^m} \varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{m-d}}$$

$\frac{1}{3!} +$

4. Caracterizar las funciones analíticas en $\mathbb{C}$ según tengan en ∞ una singularidad evitable, un polo (de orden m) o una singularidad esencial.

Sea f con f polo de orden m en z_0 sii el DSL de f en entorno de z_0 es

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots$$

$\downarrow$ $0<|z-z_0|<R$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{\left(b_{-m} + \cdots \right)}$$

serie convergente en $0<|z-z_0|<R$ y tmb converge en $z=z_0$

$\Rightarrow$ converge a una función holomorfa $\varphi(z)$ en $|z-z_0|<R$ y $\varphi(z_0) = b_{-m} \neq 0$

Luego $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m} \varphi(z)$

<u>Proposición</u> f tiene polo de orden m en z_0 sii $\dfrac{1}{(z-z_0)^m}$ con $\varphi(z)$ holo en z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$

<u>Corolario</u>: (Prob 3)

f tiene polo de orden m en z_0 sii la función $(z-z_0)^m f(z)$ tiene sing evitable en z_0.

$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(z)}{(z-\pi)^2}$

<u>Prob 6</u> z_0 es cero orden m de h

" " " " n de g

$f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ qué tipo de sing tiene f en z_0?

$h(z) = (z-z_0)^m \alpha(z)$ $\alpha(z)$ holo en z_0, $\alpha(z_0) \neq 0$

$g(z) = (z-z_0)^n \beta(z)$ $\beta(z)$ " " ", $\beta(z_0) \neq 0$

$$f(z) = \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^n} \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = (z-z_0)^{m-n} \underbrace{\boxed{\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}}}_{\varphi(z)}$$

$$= (z-z_0)^{m-n} \varphi(z)$$ φ es holo en z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$

$$f(z) = (z-z_0)^{m-n} \varphi(z)$$

Si $m-n \geq 0 \Rightarrow$ z_0 es sing evitable

Si $m-n < 0 \Rightarrow$ z_0 es polo orden $n-m$

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\text{sen}^2(z)}{}$$

$z_0 = \pi$ es cero de orden 2 de $h(z)$
$z_0 = \pi$ " " " " I " $g(z)$
$\Big\}$ $z_0 = \pi$ es polo de orden S de f

$h(z) = \text{sen}^2(z) \cdot h(\pi) = 0$

$h'(z) = 2 \,\text{sen}\, z \cos z \qquad h'(\pi) = 0$

$h''(z) = 2(\cos^2(z) - \text{sen}^2(z)) \Rightarrow h''(\pi) = 2 \neq 0$

Residuos

Si f es holo en $0 < |z-z_0| < R$,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$ residuo de f en z_0

siendo γ: curva cerrada posit orientada con $z_0 \in RI(\gamma)$

Si DSL de f en pot de $z-z_0$ es

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n dz$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cv en} \\ \text{DSL}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi i} (c_{-1} \cdot 2\pi i) = \boxed{c_{-1}}$$

↳ coef de $\frac{1}{z-z_0}$ en DSL de f en $0 < |z-z_0| < R$

Recordamos $\int_\gamma (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$

¿Cómo calcular residuos?

- Si f es holo en $z_0 \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = 0$
- " " tiene sing evitable en $z_0 \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = 0$
- " " " sing esencial en $z_0 \Rightarrow$ obtener usando def $\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz\right)$; o usando DSL de f en entorno de z_0, o con el corolario del TDR.
- Si z es polo de f $\Rightarrow$ $\text{Res}(f, z_0)$ se puede calcular
  - $\frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz$
  - c_{-1} (coef de $\frac{1}{z-z_0}$ en DSL)
  - Otros métodos, descritos a cont.

* Si z_0 es polo sple de f: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ con φ holom en entorno de z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{z-z_0} dz = \varphi(z_0)$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \varphi(z_0)$$

otra forma para polo sple

DSL de f $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$

Si $z \neq z_0$

$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$

$$\Rightarrow \boxed{c_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

* Si f tiene polo orden m en z_0.

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} dz}$

φ holo, $\varphi(z_0) \neq 0$

Otra forma: $f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0)$

$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$
$+ c_0(z-z_0)^m + \dots$

$\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z)) = (m-1)!\, c_{-1} + m(m-1)\dots 2\, c_0 (z-z_0 + \dots$

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z)) = c_{-1} = \text{Res}(f, z_0)}$$

Si z_0 polo de orden 2: $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}((z-z_0)^2 f(z))$

Ej Hallar residuos en las sing dadas

a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $z_0 = 0$

$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$

b) $f(z) = e^{1/z}$ $z_0 = 0$ sing esencial

$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \overset{= c_{-1}}{\frac{1}{z}}$

$\text{Res}(f, 0) = 1$

) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $z_0 = 0$

$DSL = z^3 \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{m-3}} = \frac{1}{z^{-3}} + \frac{1}{z^{-2}} + \frac{1}{2!\, z^{-1}} + \frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{4!\, z} + \frac{1}{5!\, z^2} + \dots = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!\, z} + \dots$

$\text{Res}(f, 0) = 1/4!$

.) $f(z) = z^n e^{1/z}$ $z_0 = 0$

$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(n+1)!}$

e) $f(z) = (z+1) e^{1/z}$

DSL: $(z+1) \sum_0^\infty \frac{1}{n!\, z^n} = \sum_0^\infty \underbrace{\frac{(z+1)}{n!\, z^n}}_{\text{no es s pot de } z}$

DSL:

$(z+1) e^{1/z} = (z+1) \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n!\, z^n}\right) = \sum_0^\infty \frac{z}{n!\, z^n} + \sum_0^\infty \frac{1}{n!\, z^n} =$

$z + 1 + \frac{1}{2!\, z} + \frac{1}{3!\, z^2} + \dots + 1 + 1/z + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \dots = z + (1+1) + \left(1 + \frac{1}{2!}\right) \frac{1}{z}$

$+ \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \frac{1}{z^3} + \dots = z + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \frac{1}{z^n}$

$\text{Res}(f, 0) = 1 + 1/2! = 3/2$

f) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$ $z_0 = 0 \rightarrow$ polo orden

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ $h(z) = \sin(z)$, $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0 \rightarrow$ 0 es cero de orden 1 de h

$g(z) = z^2 \rightarrow$ 0 es "0" de orden 2 de g

$\Rightarrow$ 0 es polo de orden 1 de f $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} =$ [illegible]

$\lim_{z \to 0} \frac{ch(z)}{1} = 1$

g) $f(z) = \frac{1}{z^3(z+1)}$ $\quad z_0 = 0 \to$ polo orden 3

$f(z) = \frac{1/(z+1)}{z^3}$ $\quad Res(f,0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{2!} z^3 f(z)\right]$

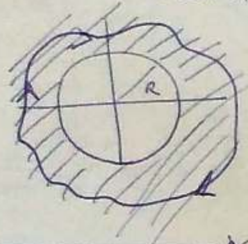
$= \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} \frac{2}{(z+1)^3} = 1$

$\left(\frac{1}{z+1}\right)' = \frac{-1}{(z+1)^2} \quad \left(\frac{1}{z+1}\right)'' = \frac{2}{(z+1)^3}$

$\boxed{\text{Residuo en } \infty}$

Si f es holo en $|z| > R$ $\left(\begin{matrix}\text{entorno del } \infty, \\ \infty \text{ es sing aislada}\end{matrix}\right)$ se define $Res(f,\infty)$

$Res(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\,dz$ donde γ es curva cerrada en $|z| > R$ / $0 \in RI(\gamma)$ negativamente orientada



DSL de f entorno al ∞

$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^n$ válido en $|z| > R$

$Res(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\,dz$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^n\,dz$

$= \frac{1}{2\pi i} \sum C_n \int_{\gamma^-} z^n\,dz = \frac{1}{2\pi i}(C_{-1}(-2\pi i)) = -C_{-1}$

sobrevive si $n = -1$

$\boxed{Res(f,\infty) = -C_{-1}}$

DSL en $|z| > R$:

$f(z) = \cdots + \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-1}}{z} + C_0 + \cdots$ $\quad C_{-1} \to -Res(f,\infty)$

$f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + C_{-2} z^2 + C_{-1} \cdot z + C_0 + \frac{C_1}{z} + \cdots$

$g(z) = \frac{1}{z^2} f(1/z) = \cdots + C_{-2} + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_0}{z^2} + \cdots$

desarrollo en serie de L de g en ent de 0

$C_{-1} = Res(g,0)$ válido si 0 es de g

$\boxed{Res(f,\infty) = -Res(g,0)}$

$Res(f,\infty = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

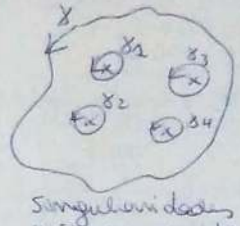
Nota No es cierto que si ∞ es evitable de f el residuo de f en ∞ sea 0

Ej $f(z) = e^{1/z}$ $\quad z = \infty$ sing evitable

$Res(f,\infty) = Res\left(\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right) = -Res\left(1/z^2 e^z, 0\right) = -1$

$\frac{1}{z^2} e^z = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots\right) = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3! z} + \cdots\right)$

Teorema de los residuos



singularidades aisladas finitas

Sea γ una curva cerrada $\oplus$ orientada y sea f holo en $\gamma \cup RI(\gamma)$, excepto en ~~z_1~~ $\cdots, z_K$, tales que $z_j \in RI(\gamma)$ $j = 1, 2, \cdots, K$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f, z_j)$

Corolario

Si f tiene una # finita de singularidades (todas son aisladas) en el plano $\mathbb{C}$, $z_1, z_2, \cdots, z_K \Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{K} Res(f, z_j) + Res(f,\infty) = 0$

para una función entera el Residuo en el ∞ vale 0

Observación Se puede usar el corolario para calcular algún residuo difícil conociendo el resto.

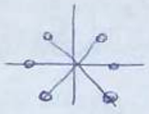
Calcular $\int_\gamma \frac{z^5+1}{z^6-1}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} Res(f, z_j) = -2\pi i\, Res(f,\infty) = +2\pi i$

$\gamma: |z| = 25$

Sing $z / z^6 - 1 = 0$

$z^6 = 1$

tiene 6 raíces



Veamos $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = g(z)$

$= \frac{1}{z^2} \frac{(1/z^5 + 1)}{(1/z^6 - 1)}$

$= \frac{1+z^5}{1-z^6} \cdot \frac{1}{z}$

$z = 0$ es polo sple

$Res(g,0) = \lim_{z \to 0} z\, g(z) = 1$

$Res(f,\infty) = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -Res(g,0) = -1$

$f(z) = \frac{2z+1}{z^4(e^{\frac{i\pi}{z}}-1)}$ Sing $z=\infty$, $z_0=0$ $z_K = \frac{1}{2K}$, $K\in\mathbb{Z}$, $K\neq 0$ $e^{\frac{i\pi}{z}}-1=0$

$\boxed{\frac{1}{2K}=z} \Leftrightarrow \frac{i\pi}{z} = 2k\pi i \Leftrightarrow e^{\frac{i\pi}{z}} = 1$

$k\in\mathbb{Z}, K\neq 0$

z_0 es sing no aislada z_K: aisladas

$\lim_{K\to\infty} z_K = z_0$ $\lim_{z\to z_K} f(z) = \lim_{z\to z_K} \frac{2z+1}{z^4(e^{\frac{i\pi}{z}}-1)}$

$$= \begin{cases} \overset{\text{si } K=-1}{=} \lim_{z\to -1/2} f(z) = \frac{i}{(-1/2)^4\, 2\pi} \\ \infty \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

CAUX

$$\lim_{z\to -1/2} \frac{2z+1}{e^{i\pi/z}-1} \overset{LH}{=} \lim_{z\to -1/2} \frac{2}{e^{i\pi/z}\cdot\left(\frac{-i\pi}{z^2}\right)} = \lim_{z\to -1/2} \frac{2z^2}{e^{i\pi/z}(-i\pi)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-i\pi)\, e^{-2i\pi}} = \frac{i}{2\pi}$$

Veamos si son polos de orden 1.

Ver si $\exists \lim_{z\to z_K} (z-z_K) f(z)$ y es $\neq 0$

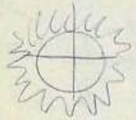
Otra forma: $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ con $h(z) = 2z+1$, $g(z) = z^4(e^{i\pi/z}-1)$

z_K, $K\neq -1$ es cero de g con qué orden?

$g(z_K) = 0$, $g'(z_K)\neq 0$ $\Rightarrow$ z_K es cero de g de orden 1

z_K no anula denominador $\Rightarrow$ polo de orden 1 de f

$z=\infty$ sing aislado



f holom en ext de $|z|>1/2$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{2}{z}+1}{(1/z)^4(e^{i\pi z}-1)} = \frac{\frac{2+z}{\cancel{z}}\,\cancel{z^4}\,z^3}{e^{i\pi z}-1}$$

$z=0$ anula con orden 3 el numerador y anula con orden 1 el denominador

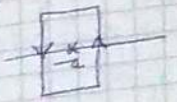
$\Rightarrow z=0$ es sing evitable

$\Rightarrow z=\infty$ es sing evitable de $f(z)$

• Calcular los residuos en las sing aisladas • $\text{Res}(f,-1/2) = 0$ porque es sing evit

• $\text{Res}(f, z_K) = \lim_{z\to z_K}(z-z_K) f(z)$

en pot de $z+1$



④ de $h(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$ en $z_0 = -1$

$$h(z) = \frac{1}{(z+1)}\cdot\frac{z}{z+3} = \frac{1}{(z+1)}\left(\frac{z+3-3}{z+3}\right) = \frac{1}{(z+1)}\left(1-\frac{3}{z+3}\right)$$

$$= \frac{1}{(z+1)}\left(1-\frac{3}{2+(z+1)}\right) = \frac{1}{(z+1)}\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(z+1)}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)(-1)^n\left(\frac{z+1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(z+1)^{n-1}$$

$\downarrow$

$0<|z+1|<2$

$\int_C g(z)\,dz = \text{Res}(g,-1)$ $g(z) = \frac{h'(z)}{(z+1)^2}$

$$h(z) = \frac{-1}{2}\frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(z+1)^{n-1}$$

$$h'(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(z+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(n-1)(z+1)^{n-2}$$

$$g(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{3}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(n-1)}_{c_{n-4}}(z+1)^{n-4}$$

$\text{Res}(g,-1) = c_{-1}$ para $n=3$

$c_{-1} = \frac{3}{2}\frac{(-1)^4}{2^3}\cdot 2$ $c_{-1} = \frac{3}{8}$

Integrales impropias

Def Sea f real integrable en [a,b] ∀ b, b>a. Decimos que f es integrable en (a,∞) si ∃ $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ y llamamos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

También decimos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge

Def si f es integrable en [a,b] ∀a, a<b

Decimos que f es integrable en (-∞, b] si ∃ $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, y lo llamamos $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ decimos que $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ conv.

Def Si f es int en [a,b] para c/ a,b con a<b decimos que f es integrable en (-∞,∞) si ∃ $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ y llamamos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

Tmb decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ converge si tal límite ∃.

Ej $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \boxed{I}$

si $\boxed{p\neq 1}$

$$\boxed{I} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases}\frac{1}{p-1} & si\ p>1\\ \infty & si\ p<1\end{cases}$$

$$\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = \begin{cases}0 & si\ p>1\\ \infty & si\ p<1\end{cases}$$

Si p=1 $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b - \ln 1\Big|_1^b$

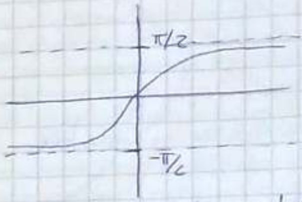
Luego $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} C\ a\ \frac{1}{p-1} & si\ p>1\\ D & si\ p\leq 1\end{cases}$

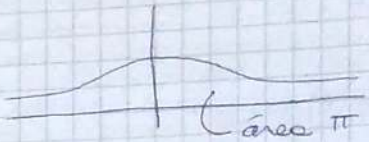
p=2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ p=3 $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}$

p=1/2 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ D

Ej $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}(\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg}(a))$

$= \frac{\pi}{2} - (-\pi/2) = \pi$





Def Si f es integrable en [-a, a] ∀ a>0. El valor ppal de $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ se define $VP\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$, si tal límite ∃.

Resultados

a) Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ∃ ⇒ ∃ $VP\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

b) Si f es par, $VP\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} 2\int_0^a f(x)\,dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int_b^0 f(x)\,dx$

d) Si f es par $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} f(x)$

Si f " " y ∃ $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (C) y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Ej $vp\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a} = \lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} = 0$

$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx} = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{0} x\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\,dx$

0 $= \lim_{a\to\infty} -\frac{(a)^2}{2} + \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{2}$ ∄

$vp\int_{-\infty}^{\infty} f \overset{\to \text{impar}}{=} 0$

Ej $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\cos(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\cos(x)\,dx$

$= \lim_{a\to-\infty} -\text{sen}(a) + \lim_{b\to\infty}\text{sen}(b)$ ∄ cos x no es int en $(-\infty, \infty$

$vp\int_{-\infty}^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{0}\cos x\,dx = \lim_{a\to\infty} 2\,\text{sen}\,x$ ∄

Ej $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_{a}^{b}\frac{1}{1+x^3}\,dx$ f no es impar

Ej $vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(3x)}{1+x^2}\,dx = 0$

$f(-x) = \frac{\text{sen}(-3x)}{1+x^2} = -\frac{\text{sen}\,3x}{1+x^2} = -f(x)$ f impar

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}\,3x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b}\frac{\text{sen}(3x)}{1+x^2}\,dx$

cosas que estudié p/parcial

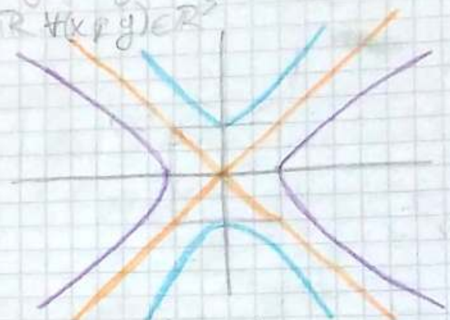
② $u_{xx}+u_{yy}=0$

$f(g(z)) = g(Re(z^2)) + i\,g(Im(z^2))$

$g: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$/ D=\mathbb{R}$

$u(x,y) = g(x^2-y^2) = g(Re(z^2))$
$v(x,y) = g(Im(z^2)) = g(2xy)$

$g(x^2-y^2)$ agarra x^2-y^2 y mapea sus curvas de nivel en $\mathbb{R}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$



🟧 $x^2-y^2=0$
$|x|=|y|$
🟪 $x^2-y^2=1$
🟦 $x^2-y^2=-1$

Si elijo mapear a f como $f = u + iv$ siendo $u = g(x^2-y^2)$, sabiendo que mapea $\mathbb{R}$ de la forma que vemos en el dibujo, inmediatamente retomando la idea de que $g(x^2-y^2)$ nos manda a mapear curvas equipotenciales en $\mathbb{R}^2$, voy a pedir que

$\nabla g(x^2-y^2)$ sea ⊥ a $\nabla m(\psi(x,y))$ donde para que sean ⊥ me aseguro que $\psi(x,y) = 2xy$ porque sé que es $Im(z^2)$ y que sé defino $h(z) = z^2 = Re(z^2) + i\,Im(z^2)$ que es holomorfa en $\mathbb{C} \to Re(z^2)$ e $Im(z^2)$ son armónicas conj. y donde $m: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$f(z) = \frac{\text{Log}(z+1)}{z^3} \qquad DH = \mathbb{C} - \{ \overset{z/z=x+iy}{x<-1, y=0 \wedge z=0} \}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\text{Log}(z+1)}{z^3}\right) = \frac{\frac{1}{z+1} \cdot z^3 - \text{Log}(z+1) \cdot 3z^2}{z^6}$$

$$= \frac{z^3}{z^6 \, z+1} - \frac{\text{Log}(z+1)\, 3z^2}{z6} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z^3} - \frac{3\,\text{Log}(z+1)}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-(-z)} - \frac{3}{z^4} \text{Log}(z+1)$$

$$= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n - \frac{3}{z^4} \text{Log}(z+1)$$

$\downarrow$

$|z|<1$

$\cap$ DH

Busco DSL Log(z+1) con Log(z+1) holom en $\mathbb{C} - \{ \overset{z/y=0}{x \leq -1} \}$

Se que $\frac{d}{dt} \text{Log}(z+1) = \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \quad \forall |z|<1$

$$\Rightarrow \text{Log}(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-z)^{n+1} + \underset{a_0}{0}$$

$$\frac{d}{dt}(f(z)) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n - \frac{3}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-z)^{n+1}$$

$$\frac{d}{dt}(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{n-3} - (-1)^n (z)^{n-3} (n+1)\,3$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-3} \underbrace{(1-(n+1)3)}_{\frac{1-n-3}{-n-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-n-2)\, z^{n-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -(-1)^n (n+2)\, z^{n-3}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -(-1)^n (n+2) \frac{z^{n-2}}{(n-2)} + a_0$$

$\rightarrow$ cuidado $n \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \text{Log}(z+1) \qquad DH = \mathbb{C} - \{ z / x \leq -1, z=0 \}$$

Busco DSL de Log(z+1):

$$\text{Busco } \frac{d}{dt} \text{Log}(z+1) = \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \forall |z|<1$$

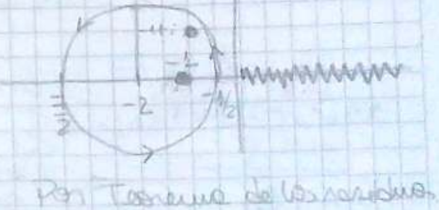
$$\Rightarrow \text{Log}(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} z^{n+1} + \underset{a_0}{0} \qquad \forall |z|<1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} z^{n+1} \qquad \forall z \in DH \cap |z|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} z^{n+1-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} z^{n-2} \qquad \forall z \in DH \cap |z|<1$$

$$\int_C \frac{\sqrt[3]{z}}{(z+1)^2 (z+1-i)} dz$$



$z^{1/3} = |z|^{1/3} e^{\frac{i \arg z}{3}}$

$$(-1)^{1/3} = 1 e^{\frac{i \arg(-1)}{3}} = -1 = 1 e^{i\pi}$$

$$(-1+i)^{1/3} \quad \sqrt{2} e^{\frac{i \arg(-1+i)}{3}} = \sqrt{2} e^{i \frac{11}{4}\pi \cdot \frac{1}{3}}$$

$$\frac{\arg(-1)}{3} = \pi$$

Luego $\arg(-1) = 3\pi$

$\Downarrow$

$2\pi < \arg z < 4\pi$

Por Teorema de los residuos

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \,(\text{Res}(f,-1) + \text{Res}(f,-1+i))$$

$z_0 = -1+i$ polo simple

$$\text{Res}(f,-1+i) = \lim_{z \to z_0} (z+i-1) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\sqrt[3]{z}}{(z+1)^2} = \frac{(-1+i)^{1/3}}{i^2} = -1 (\sqrt{2} e^{i\frac{11}{12}\pi})$$

$z=-1$ polo de orden 2, sing aislada

$$\text{Res}(f,-1) = \lim_{z \to -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\sqrt[3]{z}}{(z+1-i)} = \frac{-1}{-i} = -i$$

F

$f(z) = 1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \frac{z^6}{4}$ → c_{-0} → 3H

k=0 k=1 k=2 k=3 $(n+1)$

$c_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

$c_{-0} = 1 = f(0)$

$c_{-2} = -1 = \frac{f'(0)}{2!}$

$c_{-4} = \frac{1}{3} = \frac{f''''(0)}{4!}$

$c_{-6} = -\frac{1}{4} = \frac{f^6(0)}{6!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)(z^2)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z^2)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1) z^{2n} z^{-2}$$

$$= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}}{z^2}$$

$$= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (w)^n}{w} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} (w)^{n+1}}{w} = \frac{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{n+1}}{n+1}}}{w}$$ ✓

sé que $\frac{1}{1+w}$ es la derivada de $\log(1+w)$
⇒ aquí el término indep vale 0 porque está centrada en 0.

⇐ esta sumatoria es la integral de esta:

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$$

↑ $|w| < 1$

de esta forma $f(z)$ converge a $\frac{\log(1+z^2)}{z^2}$ si $|z^2| < 1$

19.c $\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(3x)}{1+x^2}}_{f(x)} dx$

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

f cambia de signo en $[0, +\infty)$

Analizamos $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$

$$|f(x)| = \left| \frac{\cos(3x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} g \text{ conv} \underset{C.C.}{\Rightarrow} \int_0^{\infty} |f| \text{ conv} \Rightarrow \int_0^{\infty} f \text{ conv}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{\cos(3x)}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\tilde{f}$ es par, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \geq 0$

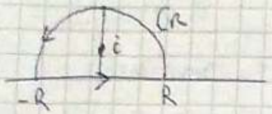
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{1+x^2} dx$ ¿C?, Si; como int es conv.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) dx = vp \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \tilde{f}(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \tilde{f}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$\tilde{f}(x) = \frac{\cos(3x)}{1+x^2}$ $\quad f(z) = \frac{e^{i3z}}{1+z^2}$ p sing ↗ $z_1 = i \in int(\Gamma)$ ↘ $z_2 = -i \notin int(\Gamma)$



$\Gamma : [-R, R] \cup C_R$

$R > 1$

$\oint_\Gamma f(z)dz = \pi e^{-3}$

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \, Res(f, i) = 2\pi i \frac{e^{-3}}{2i}$$

$$Res(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{i3z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-3}}{2i}$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{x^2+1} dx + \underbrace{\int_0^\pi \frac{e^{i3Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta}{1+R^2e^{iR\theta}}}_{\to 0 \text{ con } R \to \infty}$$

Tomo lim para $R \to \infty$

Luego:

$$\pi e^{-3} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{1+x^2} dx = VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{1+x^2}$$

$$= \underbrace{\pi e^{-3}} + \underbrace{i0}$$

igualamos parte real con real e imag con imag.

$$\frac{e^{i3z}}{1+x^2} = \underbrace{\frac{\cos(3x)}{1+x^2}} + \underbrace{\frac{i\,sen(3x)}{x^2+1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(3x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-3}$$

19.d) $\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} dx \qquad g(x) = \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}$ no está def en $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1 \Rightarrow$ la func $g(x)$ es disc evit en $x=0$

Analizo $\int_0^1 g(x)\,dx \to$ conv.

$\int_1^\infty g(x)dx$

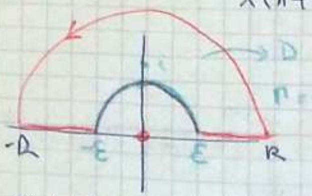
$\underline{x \geq 1}$ $\quad |g(x)| = \frac{|sen\, x|}{x(1+x^2)} \leq \frac{1}{x^3} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ (c)

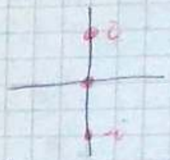
$\Rightarrow \int_1^\infty |g| dx$ (c) $\Rightarrow \int_0^\infty g$ (c) $\therefore \int_0^\infty g$ (c)

$f(x) = \frac{sen(x)}{(x^2+1)x}$, $x \in \mathbb{R}$, análogo $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ (c)

Definimos $f(z) = \frac{e^{iz}}{x(1+x^2)}$ $\qquad$ sing de f: $z=0$ $\downarrow$ polo sple

$z = i$, $z = -i$ > polos sples





Tomo $0 < \varepsilon < 1$, $R > 1$

Por T. de Res:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \, Res(f, i) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z(z+i)} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{-2}$$

Por otro lado

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \underbrace{\int_{C_\varepsilon} f(z)dz}_{-i\pi} + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \overset{\xrightarrow{R\to\infty} 0 \text{ con } R\to\infty}{\int_{C_R} f(z)dz} = -\pi i e^{-1}$$

Tomamos lim para: $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$

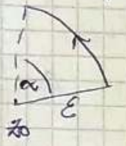
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz = 0 \text{ (por Lema de Jordan)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz = -i\pi\underbrace{Res(f,0)}_{1} = -i\pi$$

$\downarrow$

Teoremita

z_0 = polo sple de $f(z)$



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C\alpha} f(z)dz = i\alpha Res(f, z_0)$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} \quad ; \; z_0 = 0 \text{ polo sple}$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} \quad , \; z_0 = 0 \text{ polo sple}$$

$C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - i\pi + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i\pi(1-e^{-1})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}dx = i\pi(1-e^{-1})$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\to \text{impar}}{\frac{\cos(x)}{x(1+x^2)}}dx = 0$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx = \pi(1-e^{-1})$$

<u>Coloquio 5/7/17</u>

1b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x+1)^\beta}{x^\beta(1-x^\gamma)}dx$ Para qué valores reales ⊕, α, β, γ, la int (C)

$$f(x) = \frac{(x+1)^\alpha}{x^\beta(1+x^\gamma)} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^{\beta-\gamma-\alpha}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^{\beta+\gamma-\alpha}}dx$$

(C) sii $\beta+\gamma-\alpha > 1$ Por crit de comp al lim $\displaystyle\int_1^\infty f(x)$ (C) sii $\boxed{\beta+\gamma-\alpha > 1}$

Cerca de 0 $f(x)$ se comporta como $h(x) = \frac{1}{x^\beta}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{h(x)} = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}dx$ (c) $\Leftrightarrow \beta < 1$, por crit de comp $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ (c) sii $\boxed{\beta < 1}$

<u>Rta</u>: $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$

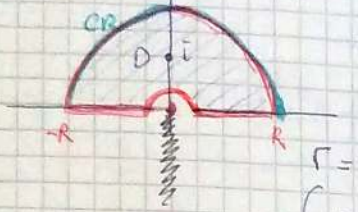
$\beta + \gamma - \alpha > 1$

$\beta < 1$

Hallar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x+1)}{x^{1/2}(1+x^2)}dx$ Sea $f(z) = \dfrac{z+1}{z^{1/2}(1+z^2)}$

Tomando $z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}}$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$$



$$f(x) = \frac{x+1}{x^{1/2} e^{i\pi/2}(1+x^2)} = \frac{x+1}{x^{1/4}(1+x^2)}$$

$\Gamma = \partial D$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \, Res(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-i)(z+1)}{z^{1/2}(z+i)(z-i)}$$

$$= \frac{(i+1)}{i^{1/2}\cdot 2i} 2\pi i = \frac{(i+1)\pi}{e^{i\pi/4}}$$

$$\underbrace{\int_{CR} f}_{\xrightarrow[\to 0]{R\to\infty}} + \int_{[R,\varepsilon]} f + \int_{C\varepsilon} f + \int_{[\varepsilon,R]} f \;\;//$$

Sobre CR:

$$\left| \int_{CR} \frac{z+1}{z^2(1+z^2)} dz \right| \leq ML = \frac{(R+1)}{\sqrt{R}(R^2-1)} \pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$|f(z)| = \left| \frac{z+1}{z^2(1+z^2)} \right| \leq \frac{|z|+1}{|z|^{1/2}\,||z|^2-1|} \overset{\substack{\text{sobre CR}\\ \uparrow}}{=} \frac{R+1}{\sqrt{R}(R^2-1)} = M$$

Sobre C_ε:

$$\left| \int_{C\varepsilon} \frac{z+1}{z^{1/2}(1+z^2)} dz \right| \leq \underbrace{\frac{\varepsilon+1}{\sqrt{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)}}_{M} \pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$dz = d\rho\, e^{i\pi}$

$$\int_{[-R,\varepsilon]} f(z)\,dz = -\int_\varepsilon^R \frac{\rho e^{i\pi}+1}{\sqrt{\rho}\, e^{i\pi/2}(1+\rho^2 e^{i2\pi})}$$

$z = \rho e^{i\pi}$

$\rho \in [\varepsilon, R]$

$$= -\int_\varepsilon^R \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho^2)} e^{i\pi/2} d\rho = -i\int_\varepsilon^R \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho^2)} d\rho$$

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{1+\rho}{\sqrt{\rho}(1+\rho^2)} d\rho$$

$z = \rho$

$dz = d\rho$

Con $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$-i\int_\varepsilon^R \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho i)} + \int_\varepsilon^R \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho i)} = \pi(i+1)e^{-i\pi/4}$$

$$= \pi(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \pi\sqrt{2}$$

Luego:

$$\int_0^\infty \frac{(1+\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho i)} d\rho = \pi\sqrt{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}(1+\rho i)} d\rho = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx \qquad f(x) = \frac{1}{x^3+1} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3}$$

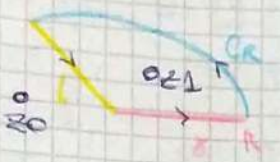
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ (c) $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ (c)

$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$ no tiene probl. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx$ (c)

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3+1} = \frac{1}{1 [illegible] x^3} \neq f(x)$ no es par ni impar

No sirve este contorno



Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ $\longrightarrow$ sing

$C = C_R \cup l \cup \gamma$

$\oint_C f(z)\,dz =$

$z^3 = -1$

$z_0 = -1$

$z_1 = e^{i\pi/3}$

$z_2 = e^{-i\pi/3}$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)}{z^3+1} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3e}$$

$$= \frac{1}{3e^{i 2/3\pi}} = \frac{1}{3} e^{-i\pi/3}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \frac{1}{3} e^{-i 2/3 \pi}$$

$$\oint_C f = \int_{C_R} f + \int_l f + \int_\gamma f = 2\pi i \frac{1}{3} e^{-i 2/3 \pi}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^3+1} dz \right| \leq ML = \frac{1}{R^3-1} \frac{2}{3}\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{1+z^3} \right| \leq \frac{1}{||z|^3-1|} \underset{\substack{\text{Sobre}\\ C_R}}{\downarrow} = \frac{1}{R^3-1} = M$$

$$\int_l \frac{1}{z^3+1} dz = -\int_0^R \frac{1}{(pe^{i2/3\pi})^3+1} e^{i 2/3\pi} dp \overset{⊛}{=}$$

$z = pe^{i2/3\pi}$, $p \in [0,R]$

$dz = dp\, e^{i2/3\pi}$

$$\underset{⊛}{=} -e^{i2/3\pi} \cdot \int_0^R \frac{1}{p^3 e^{i2\pi}+1} dp = -e^{i2/3\pi} \int_0^R \frac{1}{p^3+1} dp$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^3+1} dz = \int_0^R \frac{1}{p^3+1} dp$$

$z = p$ $p \in [0,R]$

$dz = dp$

Tomando lim $R\to\infty$:

$$-e^{i2/3\pi} \int_0^\infty \frac{1}{p^3+1} dp + \int_0^\infty \frac{1}{p^3+1} dp = \frac{2}{3}\pi i e^{i 2/3 \pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{p^3+1} dp \left[-e^{i2/3\pi} + 1 \right] = \frac{2}{3} \pi e^{i 2/3 \pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{p^3+1} dp = \frac{2\pi}{3} i \frac{e^{-i2/3\pi}}{(1-e^{i2/3\pi})} = \frac{2}{3}\pi i \frac{\left(\frac{-1}{2} + i\sqrt{3}/2\right)(3/2 + i\sqrt{3}/2)}{(3/2 - i\sqrt{3}/2)(3/2 + i\sqrt{3}/2)}$$

$$= \frac{2/3 \pi i \left(\frac{-3}{4} + \frac{3}{4} + i \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}{9/4 + 3/4}$$

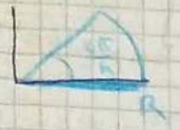
$$= \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}(-2)}{3}$$

$$= \frac{4}{9} \pi \sqrt{3}$$

$$e^{i2/3\pi} = \cos(2/3\pi) + i \operatorname{sen}(2/3\pi)$$

$= -\frac{1}{2} + i$ ~~sen(~~ $\sqrt{3}/2$

En gral $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^n+1} dx \quad n \in \mathbb{N}$



Ecuaciones diferenciales (EDDP) en derivadas parciales

Incógnita: una función $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$

De orden k: si la derivada parcial de u con > orden que aparece en la ec es de orden k.

Ej $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \rightarrow$ orden 2

$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^5 = 0 \rightarrow$ orden 3

Operadores

$$u \rightarrow \boxed{op} \rightarrow f$$

Ej

$$u(x,y) \rightarrow \boxed{\Delta} \rightarrow f(x,y) = \Delta u(x,y) = u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y)$$

operador laplaciano

Dom C^2

$$u(x,y) \rightarrow \boxed{\nabla} \rightarrow \bar{f}(x,y) = (u_x, u_y)$$

operador gradiente

Dom C^1

$$u(x,y) \rightarrow \boxed{uv} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} z$$

Operadores lineales

$$u \rightarrow \boxed{L} \rightarrow L(u)$$

L es lineal si

$L(u+v) = L(u) + L(v)$ ∀ func. u v en el dom de L.

$L(\alpha u) = \alpha L(u)$ ∀ u en el dom L y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ej: $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta \rightarrow$ es lineal

$L = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \quad L(u(x,y)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ → no es lineal (sacando ctes)

$$L(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial x}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{L(u)} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{(\partial v / \partial x)^2}_{L(v)}$$

EDDP lineal es de la forma: $L(u) = f$, donde L es un operador diferencial lineal

EDDP lineal homogénea es de la forma $L(u) = 0$ donde L es op dif lineal

Ej EDDP lineal es por ej $\underbrace{u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = f(x,y)}_{\text{Ec de Poisson}}$

EDDP lineal homog. $\underbrace{u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0}_{\text{Ec de Laplace}}$

EDDP lineal homogénea

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) c^2 \quad c: \text{cte}$$

Ec calor unidimensional

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, c^2 = 0$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{c\,\partial}{\partial t} \rightarrow \text{op dif lineal}$$

Ppio de superposición: Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son sols. la EDP lineal homogénea $L(u) = 0$, entonces,
$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$ es solución de la EDP para cf. $a_1, \ldots, a_k$ $\mathbb{R}$.

Dem $L(u) = L(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k) = \underbrace{a_1 L(u_1)}_{\substack{0 \\ u_1 \text{ es sol}}} + \underbrace{a_2 L(u_2)}_{\substack{0 \\ u_2 \text{ es sol.}}}$

$+ \ldots = 0$

$\Rightarrow u$ es sol de $L(u) = 0$

Si u es sol. de la EDP lineal no hom $L(u) = f$ y u^h es sol. de EDP lineal hom.

$L(u) = 0 \Rightarrow V = u + u^h$ es sol de $L(u) = f$

Problemas lineales

$$\circledast \begin{cases} L_1(u) = f_1 \\ L_2(u) = f_2 \end{cases} \qquad L_m(u) = f_m$$

siendo $L_1, \ldots, L_m$ ops lineales.

Dado el probl lineal $\circledast$, se puede descomponer así:

P_1	P_2	P_m
$L_1(u) = f$	$L_1(u) = 0$	$L_1(u) = 0$
$L_2(u) = 0$	$L_2(u) = f_2$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$L_m(u) = f_m$
$L_m(u) = 0$	$L_m(u) = 0$	

Decimos si u_1 es sol de P_1 y u_2 es sol de P_2 $\ldots$, u_m es sol de P_m $\Rightarrow u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$: sol del problema $\circledast$

Algunos problemas lineales

Ⓐ Cuerda vibrante

$$a^2 u''_{xx}(x,t) = u''_{tt}(x,t) \quad 0<x<L, \ t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array}\right\} \text{extremos fijos}, \ t>0$$

$$\underbrace{u(x,0) = f(x) \quad 0<x<L}_{\text{pos inicial de la cuerda.}}$$

$$\underbrace{u'_t(x,0) = g(x) \quad 0<x<L}_{\text{velocidad inicial}}$$

Ⓑ Membrana vibrante (circular)

$$a^2(u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y,t)) = u''_{tt}(x,y,t)$$

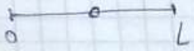
$u(x,y,t) = 0 \quad \forall (x,y): x^2+y^2 = R^2$ (borde)

$u(x,y,0) = f(x,y) \quad \forall (x,y) / x^2+y^2<R \rightarrow$ pos. inic.

$u'_t(x,y,0) = g(x,y)$ " " $\rightarrow$ vel. inic.

Ⓒ Flujo de calor

$u(x,t)$: temp en la pos x en tpo t.



$$c^2 u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \quad 0<x<L, t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = t_0 \\ u(L,t) = t_1 \end{array}\right\} \forall t>0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{extremos a temp fija } t_0 \\ \rightarrow \text{" " " " } t_1 \end{array}$$

$u(x,0) = f(x) \quad 0<x<L \rightarrow$ temp inicial

ⓒ Flujo de calor n dimensional

$c^2 \Delta u(\bar{x}, t) = u'_t(\bar{x}, t)$ $\quad \bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$u(\bar{x}, t) = G(t, \bar{x})$ $\quad \bar{x} \in \partial D$ (los $\bar{x}$ en la front del dom)

$G(t)$ = temp en la frontera.

$u(\bar{x}, 0) = F(\bar{x})$ $\quad \bar{x} \in D$

$F(x)$ = temp inic en D

ⓓ Distr $\underbrace{\text{estacionaria}}_{\text{no dep del tpo}}$ de temp

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(\bar{x}, \cancel{t}) = 0 & \bar{x} \in D \\ u(\bar{x}, \cancel{t}) = G(\bar{x}) & \text{con } \bar{x} \in \partial D \end{array}\right\} \text{Problema de Dirichlet}$$

Hallar u armónica en D conoc los vals de la frontera

㉑ $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\omega x}}{1 + x^4} dx$

$f(x) = \frac{x e^{i\omega x}}{1 + x^4} = \frac{x \cos(\omega x)}{1 + x^4} + \frac{i x \operatorname{sen}(\omega x)}{x^4 + 1}$

convergencia absoluta

$|f(x)| = \left| \frac{x e^{i\omega x}}{1 + x^4} \right| = \frac{x}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{x^3}$

$\downarrow$

$x \in (1, \infty)$

Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ C $\Rightarrow \int_1^{\infty} |f(x)| dx$ C $\rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ (C)

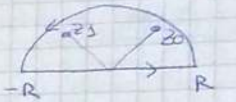
Similarm: $\int_{-\infty}^{-1} f$ (C) y $\int_{-1}^{1} f$ (C) ~~no~~ es impropia

Cálculo de I

$\tilde{f}(z) = \frac{z e^{i\omega z}}{z^4 + 1}$ $\quad$ sing $z^4 + 1 = 0$ → polos simples

$z_k = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{2} k}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$\oint_C \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(\cancel{f(z_1)}) \right)$



$\operatorname{Res}(\tilde{f}(z), z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{z e^{i\omega z}}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_k^3} \cdot z_k e^{i\omega z_k}$

$\lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{z^4 + 1} \overset{LH}{=} \lim_{z \to z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_k^3}$

$$\oint_C \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^{i\omega z_0}}{4z_0^2} + \frac{e^{i\omega z_1}}{4z_1^2} \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{i\omega e^{i\pi/4}}}{4(e^{i\pi/4})^2} + \frac{e^{i\omega e^{i\pi/2}}}{4(e^{i\pi/2})^2} \right)$$

$$= \cancel{2\pi i} \left(\frac{e^{i\omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - e^{i\omega\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{2\,\cancel{4i}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[e^{-\omega\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cancel{\cos\left(\omega \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + i \operatorname{sen}\left(\omega \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) - e^{-\omega\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cancel{\cos\left(\omega \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - i \operatorname{sen}\left(\omega \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) \right]$$

$$= \pi \cdot e^{-\omega\frac{\sqrt{2}}{2}} i \operatorname{sen}\left(\omega \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\oint_C \tilde{f} = \int_{[-R, R]} \tilde{f} + \int_{C_R} f = \pi e^{-\omega\frac{\sqrt{2}}{2}} i \operatorname{sen}(\omega \sqrt{2}/2)$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{z e^{i\omega z}}{1 + z^4} dz \right| \leq M L$$

$|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} < 1$ si $\omega > 0$, $y > 0$

Sobre C_R

$$|\tilde{F}(z)| = \left| \frac{z e^{i\omega z}}{z^4+1} \right| \leq \frac{|z|}{||z|^4 - 1|} \overset{\uparrow}{=} \frac{R}{R^4-1} = M$$

$$ML = \frac{R}{R^4-1} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Haciendo $R\to\infty$

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\omega x}}{x^4+1}\,dx = \pi i e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\sqrt{2}}{2}\right) \quad \omega > 0$$

Como ya estudie la convergencia;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\omega x}}{x^4+1}\,dx = \pi i e^{-\omega\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2), \omega > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos\omega x}{x^4+1}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}\omega x}{x^4+1}\,dx = \pi i e^{-\omega\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2) \quad \omega > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(\omega x)}{x^4+1}\,dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}\omega x}{x^4+1}\,dx = \pi i e^{-\omega\sqrt{2}/2}$$

Si $\omega < 0$ $\quad \omega = -\eta$, $\eta > 0$

$$\int \frac{x\cos\omega x}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen}(\omega x)\,dx = \int \frac{x\operatorname{sen}(-\eta x)}{x^4+1}\,dx = -\int \frac{x\operatorname{sen}\eta x}{x^4+1}\,dx$$

$$= \pi e^{-\eta\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\eta\sqrt{2}/2) = \pi e^{\omega\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2)$$

$$\int \frac{x e^{i\omega x}}{x^4+1}\,dx = \begin{cases} \pi e^{-\omega\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2) & \text{si } \omega > 0 \\ \pi e^{\omega\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2) & \text{si } \omega < 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

$$= \pi e^{-|\omega|\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{2}/2)$$

Ec onda o de D'A. 1-Dim

$u(x,t) \to u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$[x] = m \qquad [c] = m/s$

$[t] = s$

Proponemos $\quad u(x,t) = \tilde{u}(v(x,t); w(x,t))$

$v = x + ct \qquad u_x = \tilde{u}_v \cdot v_x + \tilde{u}_w w_x$

$w = x - ct \qquad u_{x\cancel{z}} = \tilde{u}_v(x+ct, x-ct) \cdot 1 + \tilde{u}_w(x+ct, x-ct) \cdot 1$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{vv} \cdot 1 + \tilde{u}_{vw} \cdot 1 + \tilde{u}_{wv} \cdot 1 + \tilde{u}_{ww} \cdot 1$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{vv} + 2 \cdot \tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}$$

$u_t = \tilde{u}_v(x+ct, x-ct) \cdot c + \tilde{u}_w(x+ct, x-ct)(-c)$

$u_{tt} = c \cdot [\tilde{u}_{vv} \cdot c - c \cdot \tilde{u}_{vw}] - c[c \cdot \tilde{u}_{vw} - c\,\tilde{u}_{ww}]$

$u_{tt} = c^2[\tilde{u}_{vv} - 2\,\tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}]$

en ED

$$c^2[\tilde{u}_{vv} - 2\tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}] = c^2[\tilde{u}_{vv} + 2\tilde{u}_{vw} + \tilde{u}_{ww}]$$

$\Rightarrow -4c^2 \cdot \tilde{u}_{vw} = 0 \qquad \tilde{u}(v,w)$

$\tilde{u}_{vw} = 0$

$\frac{\partial}{\partial w}\Big[\underbrace{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}}\Big] = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} = f(v)$

↳ no depende w $\qquad \Rightarrow \tilde{u}(v,w) = F(v) + G(w)$

∴ sol $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

F, G fc de una variable al menos 2 veces derivable

3-b) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t \geq 0$

$u(x,0) = \operatorname{sen}(2x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$

$u_p(x,t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x+5t) + \operatorname{sen}(2x-5t))$

$u(x,0) = \operatorname{sen}(2x)$

$u(0,t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(5t) + \operatorname{sen}(-5t)) = 0$

$u(\pi,t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2\pi+5t)) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi-5t)) = 0$

$v(x,t) = A\cos(2x+5t) - A\cos(2x-5t)$

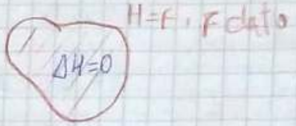
v? $v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \quad v(x,0) = 0$ cumple

$u(x,t) = u_1(x,t) + v(x,t)$ es sol del problema.

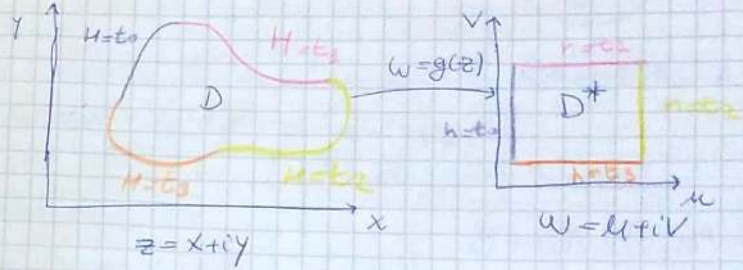
Problema de Dirichlet

Hallar a/

$$\begin{cases} H''_{xx}(x,y) + H''_{yy}(x,y) = 0 & (x,y) \in D \\ H(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \partial D \end{cases}$$



Método p/ resolver problema de Dirichlet cuando los valores en la frontera son ctes x tramos



Sea $g: D \to D^*$ una transf conforme

(D abierto, en el interior a interior, D* abierto en el int

g biyectiva, invertible

y sea $h(u,v)$ una f armónica en D*

$\Rightarrow H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$ es armónica en D!

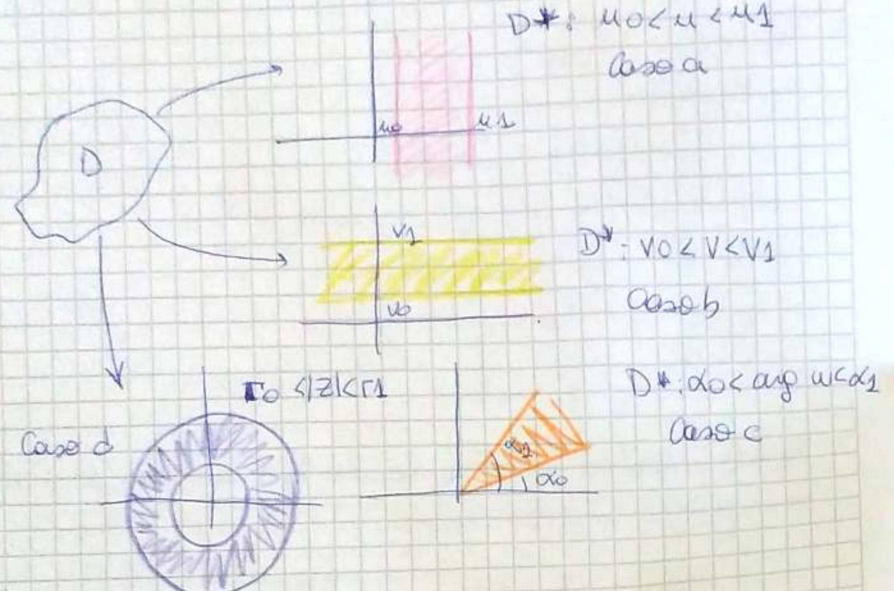
$g(z) = u + iv$

$g(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Si una curva C en ∂D se transforma por g en la curva g(C) y h(u,v) es cte mente $h(u,v) = t_K \Rightarrow$

$H(x,y) = t_K$ en C

Posibles transformaciones



Caso A Busco h/ $\Delta h = 0$ $\xrightarrow{} h''_{uu} + h''_{vv} = 0$

$h(u_0, v) = t_0$

$h(u_1, v) = t_2$

$h(u,v) = Au + B$

$h(u_0, v) = Au_0 + B = t_0$

$h(u,v) = Au + B$, A y B a determinar con condiciones de ∂D^* (t_0, t_1 datos)

$h(u_0, v) = Au_0 + B = t_0$

$h(u_1, v) = Au_1 + B = t_1$

$$A(u_0 - u_1) = t_0 - t_1 \qquad A = \frac{t_0 - t_1}{u_0 - u_1}$$

$$B = t_0 - \frac{(t_0 - t_1)}{u_0 - u_1} \cdot u_0$$

Caso B Busco h/ $\Delta h = 0$ en D^*

$h(u, v_0) = t_0$ (t_0, t_1, datos

$h(u, v_1) = t_1$

$h(u,v) = Av + B$

Determinamos A y B de

$h(u, v_0) = Av_0 + B = t_0$

$h(u, v_1) = Av_1 + B = t_1$

Caso C

Laplaciano en polares: $h(\rho, \theta)$

$\Delta h = 0$

$h(\rho, \alpha_0) = t_0$

$h(\rho, \alpha_1) = t_1$

$$\Delta h = h''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} h'_\rho + \frac{1}{\rho^2} h''_{\theta\theta}$$

Si h depende sólo de θ (no de ρ), h es armónico

$$\Delta h = \frac{1}{\rho^2} h''_{\theta\theta} = 0 \quad \Rightarrow h''_{\theta\theta} = 0$$

$$\Rightarrow h(\rho, \theta) = A\theta + B \text{ !!}$$

Determinar A y B con

$h(\rho, \alpha_0) = A\alpha_0 + B = t_0$

$h(\rho, \alpha_1) = A\alpha_1 + B = t_1$

$\boxed{\text{Caso D}}$ $D^*: r_0 < \rho < r_1$ Busco $\Delta h = 0$

$h(r_0, \theta) = t_0$

$h(r_1, \theta) = t_1$

Si h solo dep de ρ (no de θ)

h es armónica si $\Delta h = h''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} h'_\rho = 0$

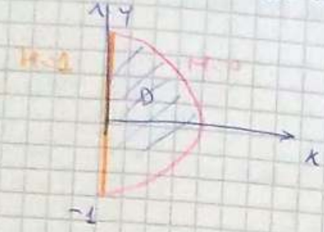
Soluciones de una EDO

$h(\rho, \theta) = A \ln \rho + B$

Determinamos A y B con $h(r_0, \theta) = A \ln r_0 + B = t_0$

$h(r_1, \theta) = A \ln r_1 + B = t_1$

Ej Hallar dist de temp en estado estac en un semidisco de radio 1, sabiendo que en el borde recto la temp vale 1 y en el borde semicircular, la temp vale 0.

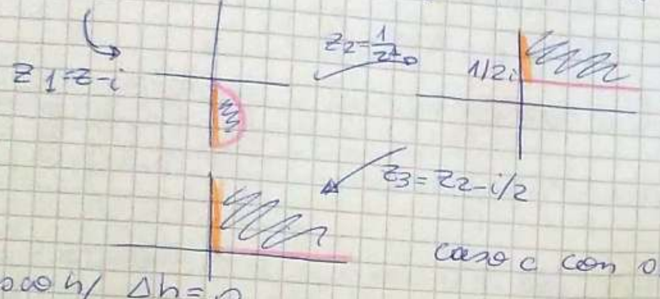


$\Delta H(x,y)=0$

$H(0,y)=1$

$H(0,y)=1 \quad -1\leq y\leq 1$

$H(x,y)=0$ con $x^2+y^2=1,\ x\geq 0$



caso c con $0\leq\theta\leq\pi/2$

Busco h/ $\Delta h=0$

$h(\rho,0)=0$

$h(\rho,\pi/2)=1$

$\Rightarrow h(\rho,\theta)=A\theta+B$

$h(\rho,0)=A\cdot 0+B=0\rightarrow \boxed{B=0}$

$h(\rho,\pi/2)=A\cdot\frac{\pi}{2}+0=1\Rightarrow \boxed{A=\frac{2}{\pi}}$

$\Rightarrow h(\rho,\theta)=2/\pi\,\theta$

$$f(z)=z_3=\frac{1}{z-i}-\frac{i}{2}\Rightarrow\frac{1}{x+iy-i}-\frac{i}{2}=\frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2}-\frac{i}{2}$$

$$=\underbrace{\frac{x}{x^2+(y-1)^2}}_{u(x,y)}\underbrace{-i\left(\frac{2(y-1)+x^2+(y-1)^2}{2(x^2+(y-1)^2)}\right)}_{v(x,y)}$$

$$H(x,y)=h(u,v)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{(2(y-1)+x^2+(y-1)^2}{2x}\right)$$

Sea D una región acotada en el plano. El problema de Dirichlet $\Delta H(x,y)=0\ (x,y)\in D$

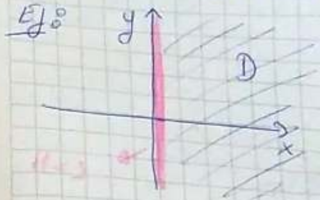
$H(x,y)=f(x,y)\ (x,y)\in\partial D$ siendo

f continua, tiene sc única; es decir

$\exists!$ armónica H / $H=f$ en ∂D

y en dom no acotados no es única en gral

Ej:



$H(x,y)=x+1\rightarrow$ es arm x ser lineal

El problema $\Delta H(x,y)=0$

$H(0,y)=1,\ y\in\mathbb{R}$

tiene ∞ scs.

$H(x,y)=x+1$

$H(x,y)=1$

$H(x,y)=Ax+1\ \forall A\in\mathbb{R}$

$H(x,y)=\operatorname{sen}x\cosh y+1$

$H(x,y)=e^y\operatorname{sen}x+1$

Espacios L^p

ev que cumplen que $\forall\ f:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}\ \int_a^b|f(x)|^p\,dx<\infty$

En particular trabajamos con $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$ f de tal L ⇒ ℝ

Coef de Fourier:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)\,dx,\quad n=0,1,2\ldots$$

$$b_n=1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx,\quad m=1,2\ldots$$

En $L^2_{\mathbb{R}}[-L,L]$ con BON $\left\{1, \cos\left(\frac{n2\pi}{L}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{L}\right)\right\}$

SF de $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-L,L]$: $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{L}x\right)$

$$+ \sum b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n2\pi}{L}x\right)dx \;,\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi}{L}x\right)dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

Serie exponencial de Fourier

$$BOG = \left\{e^{\frac{in2\pi}{L}x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

si depende de BON con el 2

$$DSF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in2\pi}{L}x}$$

$$\searrow c_n = \frac{\langle f, e^{\frac{in2\pi x}{L}}\rangle}{\langle e^{\frac{in2\pi}{L}x}, e^{\frac{in2\pi}{L}x}\rangle \to 2L} =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in2\pi}{L}x}\, dx$$

$$\langle e^{\frac{in2\pi}{L}x}, e^{\frac{in2\pi}{L}x}\rangle = \int_{-L}^{L} e^{\frac{in2\pi}{L}x}\, e^{-\frac{in2\pi}{L}x}\, dx = \int_{-L}^{L} 1\, dx = 2L$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{m\pi 2}{L}x\right)dx - \frac{i}{2L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi 2}{L}\right)dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}a_n - i\frac{b_n}{2} \quad, m>0} \qquad c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_{-m} = \frac{1}{2L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{\frac{im2\pi x}{L}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{m2\pi}{L}x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{m2\pi}{L}x\right) dx$$

$$\boxed{c_{-m}} = \boxed{\frac{1}{2}a_m + i\frac{b_m}{2} \quad m>0}$$

Props: $a_m = 2\,\mathrm{Re}[C_m]$

$b_m = -2\,\mathrm{Im}[C_m]$ $\qquad m \neq 0$

Trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} M_m \cos\left(\frac{m2\pi}{L}t - tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\right)}$$

Series de Fourier

$L^2[-L,L]$

$$\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \;,\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \;,\; m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L \\ 0 & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$\underset{n\neq 0}{=} \frac{1}{L}\frac{1}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L 1\,dx = \frac{1}{L}\cdot L = 1$$

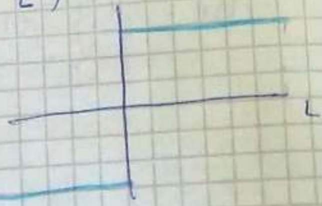
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$= -1/L\cdot\frac{L}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L = \frac{-1}{m\pi}\left(\cos(m\pi)-\cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{m\pi}\left(1-(-1)^m\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{2}{m\pi} & \text{si } m \text{ es impar, } m = 2j+1 \end{cases}$$

$$S_F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2j+1)\pi}\,\mathrm{sen}\left((2j+1)\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -L < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < L \end{cases}$$



$$g(x) = 2f(x) - 1$$

$$g(x) = 2f(x) - 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 2\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(2f(x)-1)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx\right)$$

$$-\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } m\neq 0 \\ 2\cdot 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$$

$$= 2\left(1/L\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx\right) - \frac{1}{L}\,\mathrm{sen}\,(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{m\pi}\left(1-(-1)^m\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{4}{m\pi} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$S_g(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{4}{(2j+1)\pi}\,\mathrm{sen}\left((2j+1)\frac{\pi x}{L}\right)$$

[illegible] x, impar de impar   impar · impar = par

$h(x) = x$ en $[-L, L]$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = 0$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\left(\frac{x^L(-\cos(mx))}{m\pi} + \frac{\mathrm{sen}(mx)}{m\,2\pi^2/L^2}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2L(-1)^{m+1}}{m}$$

$$S_h(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2L}{m\pi}(-1)^{m+1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$k(x) = |x|$ en $[-L, L]$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{|x|\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{par}} dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{L^2}{(n\pi)^2} + \cancel{x}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{\cdot L}{n\pi}\right)\Big|_0^L$$

$n\neq 0$

$$= \frac{2}{L}\left((-1)^n\frac{L^2}{(n\pi)^2} - \frac{L^2}{(n\pi)^2}\right) = \frac{2L}{(n\pi)^2}((-1)^n-1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{4L}{(n\pi)^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|x|\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\,dx = L$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|x|\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0$$

$$S_k(x) = L/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^2}((-1)^n-1)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

la serie en 0 converge al promedio de los limites laterales.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen}\,x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,x\cos nx\,dx \overset{n\neq 1}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos((1-n)x)}{1-n} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{1-n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1+(-1)^n)\left(\frac{1+n+1-n}{1-n^2}\right) = \frac{1}{2\pi}(1+(-1)^n)\frac{2}{(1-n^2)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,x\cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\text{sen}^2 x\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 1/2 & n = 1 \end{cases}$$

$$S(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{(1+(-1)^n)}{1-n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{2}\text{sen}(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-(2j)^2}\cos(2j\pi x) + \frac{1}{2}\text{sen}(x)$$

Serie exponencial $\left\{ e^{i\frac{n\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ plua de fc ortog en $[-L, L]$

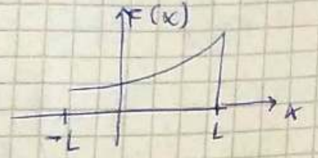
en $\mathcal{L}^2[-L, L])$

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$$

Ejemplo:

$$f(x) = e^x, \; x \in [-L, L]$$



$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2L} (e^L - e^{-L}) = \frac{sh(L)}{L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^x \cdot e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{x(1-\frac{in\pi}{L})} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \circ \frac{1}{1-\frac{in\pi}{L}} e^{x(1-in\pi/L)} \Big|_{L}^{L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \circ \frac{1}{1-in\pi/L} \Big(\underbrace{e^L \cdot e^{-in\pi}}_{(-i)^n} - \underbrace{e^{-L} \cdot e^{in\pi}}_{(-1)^n} \Big)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \, 2\frac{(-1)^n}{1-in\pi/L} \underline{(e^L - e^{-L})} \, 2$$

$$c_n = \frac{1}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{L-in\pi} (-1)^n sh(L) \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{L-in\pi} sh(L)$$

c_n con $n \neq 0$ Vale para $n=0$

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n sh(L)}{L-in\pi} \cdot e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

De la misma hallar la S. Trig de Fourier

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} e^x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx = \frac{a_0}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} e^x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$\underline{n \geq 1}$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}, \; n \geq 1$$

$$a_n = 2Re(c_n); \; b_n = -2Im(c_n)$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{L-in\pi} sh(L), \quad c_n = \frac{(-1)^n sh(L)}{L^2+n^2\pi^2} (L+in\pi$$

$$a_n = 2Re(c_n) = \frac{2(-1)^n sh(L) \cdot L}{L^2+n^2\pi^2}$$

$$b_n = -2Im(c_n) = \frac{-2(-1)^n sh(L) n\pi}{L^2+n^2\pi^2}$$

$f \in L^2([-L, L])$

$$S_{f(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1+n^2} \cos(m\pi/L\, x) + \frac{2m}{1+n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} x\right)$$

Hallar los coef de la s. exp de Fourier de f

$c_0 = \frac{a_0}{2} = 1$

$m \geq 1, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^m}{1+m^2} - \frac{i2n}{1+n^2}\right)$

$m \geq 1 \qquad c_n = \frac{(-1)^m - i2n}{2(1+n^2)} \qquad c_{-m} = \overline{c_n}$

Bessel y Parseval

Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un conj ortogonal en $L^2[a,b]$

con p.i. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g}\, dx$

$f \in L^2[a,b]$ y sea $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)$

$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int f \bar{\varphi}_k dx}{\int \varphi_k \bar{\varphi}_k dx}$ error cuadrático $\|f - S_N\|^2 = \int_a^b (f(x) - S_n)\overline{(f(x) - S_n)}\, dx$

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)\right]\left[f - \sum c_k \varphi_k\right] dx$$

$$= \int_a^b f \bar{f}\, dx - \int \sum c_k \varphi_k \bar{f}\, dx - \int f \sum c_k \bar{\varphi}_k\, dx + \int \sum c_k \varphi_k \sum c_j \bar{\varphi}_j\, dx$$

$$= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\sum c_k \int f \bar{\varphi}_k dx\right) + \sum \sum c_k c_j \int \varphi_k \bar{\varphi}_j\, dx$$

0 si $k \neq j$

con $k = j \to \|\varphi$

$$= \|f\|^2 \cdot 2\operatorname{Re}\left(\sum \bar{c}_k c_k \|\varphi_k\|^2\right) + \sum c_k \bar{c}_k \|\varphi_k\|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum \|c_k\|^2 \|\varphi_k\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b f(x) \bar{f}(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \|c_k\|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b \|f(x)\|^2 dx \Big\}$$ Desigualdad de Bessel

Si $f \in L^2[a,b]$ $\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\right)$

$$\to 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Teorema: Si $f \in L^2[a,b]$ y c_k son coef de Fourier de f respecto a un conj $\perp$ $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2$ (C)

Corolario: Si $\{\varphi_1, \ldots\}$ son O.N. y $f \in L^2[a,b]$, c_k son coef de Fourier

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ (C) $\to c_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Queremos que S_N "aproxime" a una f y que $\lim_{N \to \infty} \|f - S_N\|^2 = 0$

No siempre pasa: $\{\operatorname{sen} nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un conj ortogonal en $L^2[-\pi, \pi]$. Sea $f(x) = \cos x \in L^2[-\pi, \pi]$

$c_k = \frac{\langle \cos x, \operatorname{sen} kx \rangle}{\|\operatorname{sen} kx\|^2} = 0 \qquad S_N = \sum c_k \operatorname{sen} kn = 0$

$\|f - S_n\|^2 = \|\cos x\|^2 \cancel{\xrightarrow{N \to \infty}} 0$

$f \in L^2([-L, L])$

$$S_{f(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(n\pi/L\, x) + \frac{2n}{1+n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Hallar los coef de la S. exp de Fourier de f

$c_0 = \frac{a_0}{2} = 1$

$n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} - \frac{i 2n}{1+n^2}\right)$

$n \geq 1$ $\quad c_n = \frac{(-1)^n - i 2n}{2(1+n^2)} \qquad c_{-n} = \overline{c_n}$

Bessel y Parseval

Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un conj ortogonal en $L^2[a,b]$

con p.i. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g}\, dx$

$f \in L^2[a,b]$ y sea $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)$

$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int f \bar{\varphi}_k dx}{\int \varphi_k \bar{\varphi}_k dx}$ error cuadrático $\|f - S_N\|^2 = \int_a^b (f(x) - S_n)\overline{(f(x) - S_n)}\, dx$

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)\right]\left[\overline{f - \sum c_k \varphi_k}\right] dx$$

$$= \int_a^b f \bar{f}\, dx - \int \sum c_k \varphi_k \bar{f}\, dx - \int f \sum \bar{c}_k \bar{\varphi}_k\, dx + \int \sum c_k \varphi_k \sum \bar{c}_j \bar{\varphi}_j\, dx$$

$$= \|f\|^2 - 2 \operatorname{Re}\left(\sum c_k \int f \bar{\varphi}_k dx\right) + \sum \sum c_k \bar{c}_j \int \varphi_k \bar{\varphi}_j\, dx$$

0 si $k \neq j$

con $k = j \to \|\varphi_k$

$$= \|f\|^2 \cdot 2 \operatorname{Re}\left(\sum \bar{c}_k c_k \|\varphi_k\|^2\right) + \sum c_k \bar{c}_k \|\varphi_k^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum \|c_k\|^2 \|\varphi_k\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b f(x) \bar{f}(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \|c_k\|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b \|f(x)\|^2 dx \quad \Big\} \text{ Desigualdad de Bessel}$$

Si $f \in L^2[a,b]$ $\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\right)$

$$\to 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

<u>Teorema</u>: Si $f \in L^2[a, b]$ y c_k son coef de Fourier de f respecto a un conj $\perp$ $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2$ (C)

<u>Corolario</u>: Si $\{\varphi_1, \ldots\}$ son O.N. y $f \in L^2[a, b]$, c_k son coef de Fourier

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ (C) $\Rightarrow c_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Queremos que S_N "aproxime" a una f y que $\lim_{N \to \infty} \|f - S_N\|^2 = 0$

No siempre pasa: $\{\operatorname{sen} nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un conj ortogonal en $L^2[-\pi, \pi]$. Sea $f(x) = \cos x \in L^2[-\pi, \pi]$

$c_k = \frac{\langle \cos x, \operatorname{sen} kx \rangle}{\|\operatorname{sen} kx\|^2} = 0 \qquad S_N = \sum c_k \operatorname{sen} kn = 0$

$\|f - S_n\|^2 = \|\cos x\|^2 \overset{N \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$

un conj ortogonal $\{\varphi_{1},\dots\}$ es completo en $L^2[a,b]$ si $\lim_{N\to\infty}\|f-S_N\|^2=0 \quad \forall f\in L^2[a,b]$

$\{1,\cos(nx),\text{sen}(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$

$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$

$\{1,\cos(\frac{n\pi}{L}x),\text{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en $L^2[-L,L]$

$\{e^{in\pi/L\,x}\}\ n\in\mathbb{Z}$

$\{\text{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en $L^2[0,L]$

$\{1,\cos(\frac{n\pi}{L}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ " " " " "

Convergencia cuadrática.

Decimos que S_N converge cuadráticam a f, si $\lim_{N\to\infty}\|S_N-f\|^2=0$

(se denota $S_N \xrightarrow{2} f$

Si hay conv cuadrática

$$0=\lim_{N\to\infty}\|S_N-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\|f\|^2-\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\|\varphi_k\|^2$$

$$0=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\|\varphi_k\|^2$$

$$\|f\|^2=\int|f(x)|^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\|\varphi_k\|^2 \Big\}\ \text{igualdad de Parseval}$$

Parseval en $L^2[-\pi,\pi]$ con el conj $\perp$ $\{1,\cos nx,\text{sen}\,nx\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\,\text{sen}(kx)$$

Parseval: $\|f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\|1\|^2+\sum|a_k|^2\|\cos kx\|^2$
$+|b_k|^2\|\text{sen}\,kx\|^2$

$\|1\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}1dx=2\pi$ $\qquad$ $\|\text{sen}(nx)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\text{sen}(nx))^2dx=\pi$

$\|\cos nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(nx))^2dx=\pi$

Resulta: $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{4}2\pi+\sum|a_k|^2\pi+|b_k|^2\pi$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2$$

Parseval en $L^2[-\pi,\pi]$ con conj $\perp$ $\{e^{inx}\}\ n\in\mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2$$

Ej: $f(x)=|x|$ en $[-\pi,\pi]$

$a_0=\pi$ $\qquad$ $b_n=\{\,0\ \forall$ caso.

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{-4}{n^2\pi} & \text{e.o.c.}\end{cases}\quad n\geq1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx=2\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^3=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{impar}}}^{\infty}\left(\frac{-4}{n^2\pi}\right)^2$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{(2j+1)^2\pi}\right)^2 \to \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

convergencia de series de Fourier con conj $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\in\mathbb{N}}$

<u>conv. cuadrática</u>: Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, la serie trigonom de Fourier (c) cuadráticam a f.

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \xrightarrow{2} f$$

<u>Conv puntual</u>: Si f es cont x partes en $[-\pi,\pi]$ y x_0 es / $\exists\, f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$ ⇒ la serie trig de Fourier conv en x_0 a $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

$$\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } f \text{ cont} \\ \text{prom de lim lat} & \text{c.o.c} \end{cases}$$

<u>Obs</u>: $f'(x_0^-)$ = derivada lateral x izq
$f'(x_0^+)$ = " " x der.

<u>Obs</u>
Si $x_0 = -\pi$ se pide que $\exists\, f'(-\pi^+)$ y $f'(\pi^-)$. y la serie (c) $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$

<u>Ej</u>:
un ej anterior $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & \pi \le x \pi 0 \end{cases}$ $S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)} \operatorname{sen}((2j+1)x)$

existen deriv lat en todo $x \in [-\pi,\pi]$ } f cont x partes } ⇒ STF (c) en todo x del cont.

en part $x=\pi/2$ $S(\pi/2) = 1$ $S(\pi/2) = \sum \frac{4}{(2j+1)\pi}(-1)^j = 1$ $\sum \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$

$$S(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

<u>Conv uniforme</u>: Si f es <u>continua</u> en $[-\pi,\pi]$ y $f(\pi) = f(-\pi)$ y f' es cont x tramos ⇒ la serie trig de Fourier (c) unif a f en $[-\pi,\pi]$. y además (c) abs ⇒ garantiza conv punt.

<u>Derivar TaT una SF</u>
Si f es cont en $[-\pi,\pi]$ y $f(\pi) = f(-\pi)$ con f' y f'' cont por tramos ⇒ se puede derivar TaT y la SF obtenida es la SF de f'.

Es decir si la SF de f: $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$

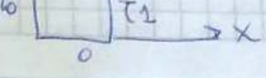
⇒ SF de f': $\sum -k a_k \operatorname{sen} kx + k b_k \cos(kx)$

<u>Integral TaT una SF</u>
Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, su SF es $a_0/2 + \sum a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$
cuadrado integrable
y sea $g(x) / g'(x) = f(x)$
⇒ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \operatorname{sen} kx - \frac{b_k}{k} \cos kx + A_0$

es la SF de $g(x) - \frac{a_0}{2} x$

$k u_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$
$u(0,t) = T_0$ $u(1,t) = T_1$, $t > 0$
$u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le 1$
$f(x) = x(1-x)$

con borde no hom
no sirve mét de sep vs



1° Buscamos sol de V(x) estacionaria (no dep de t) que satisface convergencia de series de Fourier con $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\in\mathbb{N}}$

conv cuadrática: Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, la serie trigonom de Fourier (c) cuadráticam a f

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \xrightarrow{2} f$$

conv puntual: Si f es cont x partes en $[-\pi,\pi]$ y x_0 es / $\exists\, f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$ $\Rightarrow$ la serie trig de Fourier conv en x_0 a $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

$$\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } f \text{ cont} \\ \text{prom de lím lat} & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Obs: $f'(x_0^-)$ = derivada lateral x izq
$f'(x_0^+)$ = " " x der.

Obs
Si $x_0 = -\pi$ se piden que $\exists\, f'(-\pi^+)$ y $f'(\pi^-)$. y la serie (c) $\dfrac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$

Ej:
un ej anterior

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi \le x\ \pi\ 0 \end{cases} \qquad S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)} \operatorname{sen}((2j+1)x)$$

existen deriv lat en todo $x \in [-\pi,\pi]$
f cont x partes $\Big\}\Rightarrow$ STF (c) en todo x del int.

en part $x = \pi/2$ $\quad S(\pi/2) = 1 \quad S(\pi/2) = \sum \dfrac{4}{(2j+1)\pi}(-1)^j = 1$

$$\sum \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$S(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Conv uniforme: Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y $f(\pi) = f(-\pi)$ y f' es cont x tramos $\Rightarrow$ la serie trig de Fourier (c) unif a f en $[-\pi,\pi]$. y además (c) abs $\Rightarrow$ garantiza conv punt.

Derivar TaT una SF.

Si f es cont en $[-\pi,\pi]$ y $f(\pi) = f(-\pi)$ con f' y f'' cont por tramos $\Rightarrow$ se puede derivar TaT y la SF obtenida es la SF de f'.

Es decir si la SF de f: $\dfrac{a_0}{2} + \sum a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$

$\Rightarrow$ SF de f': $\sum -k a_k \operatorname{sen} kx + k b_k \cos(kx)$

Integral TaT una SF

Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, su SF es $a_0/2 + \sum a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$
cuadrado integrable
y sea $g(x) \,/\, g'(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \operatorname{sen} kx - \frac{b_k}{k} \cos kx + A_0$

es la SF de $g(x) - \dfrac{a_0}{2}x$

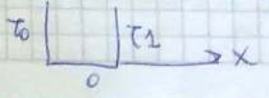
$k u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(0,t) = T_0 \quad u(1,t) = T_1, \quad t > 0$

$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 1$

$f(x) = x(1-x)$

con borde no hom
no sirve mét de sep vs



1° Buscamos sol de $v(x)$ estacionaria (no dep de t) que satisface

$k\, v''(x) = 0$

$V(0) = T_0 \quad V(1) = T_1 \quad V(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\, x$

$u(x,t) = w(x,t) + V(x)$

¿Qué prob satisf $w(x,t)$?

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} = w_{xx} + 0 \\ u_t = w_t + 0 \end{array}\right\} k \cdot u_{xx} = u_t \rightarrow \boxed{k\, w_{xx} = w_t}$$

$u(0,t) = T_0 \Rightarrow T_0 = w(0,t) + v(0) \Rightarrow \boxed{w(0,t) = 0}$

$u(1,t) = T_1 \Rightarrow T_1 = w(1,t) + v(1) \Rightarrow w(1,t) = 0$

$u(x,0) = f(x) \rightarrow f(x) = w(x,0) + V(x)$

$\Rightarrow \boxed{w(x,0) = f(x) - V(x)}$

$$\begin{cases} k\, w_{2x} = w_t, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ w(0,t) = w(1,t) = 0; & t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - V(x) \end{cases}$$

↳ "Conocido"

$w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$X_n(x) = B_n \operatorname{sen}(n\pi x),\ n \in N$

$T_n(t) = C_n e^{-k n^2 \pi^2 t},\ n \in \mathbb{N}$

$w_n(x,t) = D_n e^{-k n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),\ n \in \mathbb{N}$

Por ppio de sup

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-k n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$w(x,0) = f(x) - V(x)$

$$f(x) - V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$w(x,0) = f(x) - V(x)$

$$f(x) - V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

↳ necesito hallar una rep SF de senos de $f(x) - V(x)$

$$D_n = \frac{2}{1} \int_0^1 [f(x) - V(x)] \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx$$

$\therefore u(x,t) = V(x) + w(x,t)$ solución estacionaria

19 - v)

$u_{tt} = 3u_{xx} + 2x,\ 0 < x < 2,\ t > 0$) dif en el cerrado

$u(0,t) = u(2,t) = 0,\ t \geq 0$

$u(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 2$

$u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 2$) continua en el abierto

Busco sol $V(x)$ (indep de t) que satisfaga ED y cond de borde

$0 = 3V''(x) + 2x \quad , 0 < x < 2$

$V(0) = 0,\ V(2) = 0$

$V''(x) = -2/3\, x \quad V'(x) = -\frac{x^2}{3} + A,\ V(x) - \frac{x^3}{9} + Ax + B$

$V(0)=0 \rightarrow B=0 \quad V(2)=0 \Rightarrow -8/9 + 2A = 0 \rightarrow A = 4/9$

$V(x) = 4/9\, x - \frac{x^3}{9} = \frac{x}{9}(4-x^2) = V(x)$

$u(x,t) = W(x,t) + V(x) \rightarrow w(x,t) = u(x,t) - V(x)$

verificar que $w_{tt} = 3w_{xx}$

$w(0,t) = u(0,t) - V(0) = 0$

$w(2,t) = u(2,t) - V(2) = 0$

$w(x,0) = u(x,0) - V(x) \rightarrow \boxed{w(x,0) = -V(x)}$

$w_t(x,0) = u_t(x,0) - 0 = 0$

$$\begin{cases} w_{tt} = 3w_{xx}, & 0<x<2,\ t>0 \\ w(0,t) = w(2,t) = 0, & t \geq 0. \\ w(x,0) = -V(x) \\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$w_{tt} = X \cdot T'', \quad w_{xx} = X''T$

$w(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0$

$\hookrightarrow X(0) = 0$

$w(2,t) = 0 \Rightarrow X(2)\, T(t) = 0$

$\hookrightarrow X(2) = 0$

$w_t(x,0) = 0 \rightarrow X(x) \cdot T'(0) = 0 \rightarrow T'(0) = 0$

Em ED

$XT'' = 3X''T$

$\frac{T''}{3T} = \frac{X''}{X} = \lambda$

(1) $X'' - \lambda X = 0; \quad X(0) = X(2) = 0$

(2) $T'' - 3\lambda T = 0, \quad T'(0) = 0$

De (1) para $\lambda = 0 \rightarrow$ única sol $X(x) = 0$

$\lambda > 0$ ↗

$\lambda < 0 : \lambda = -\omega^2 \ (\omega > 0)$

$X(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x).$

$X(0) = 0 \rightarrow A = 0$

$X(2) = 0 \rightarrow B\,\mathrm{sen}(2\omega) = 0$

Si $B = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow$ No.

$\Rightarrow \mathrm{sen}(2\omega) = 0 \rightarrow 2\omega = m\pi, \ m \in \mathbb{N}$

$\omega_n = \frac{m\pi}{2}, \ m \in \mathbb{N}$

$\lambda_m = -\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2, \ m \in \mathbb{N}$

$X(x) = B_m\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)$

En la otra (2):

$$T'' + 3\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 T = 0$$

$$T_m(t) = C_n \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m\pi t\right) + D_m\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m\pi t\right)$$

$T_m'(0) = 0 \rightarrow D_m \frac{\sqrt{3}}{2} m\pi \cdot 1 = 0 \Rightarrow D_m = 0.$

$w_m(x,t) = X_m(x) \cdot T_m(t)$

$w_m(x,t) = E_m\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m\pi t\right)$

$w(x,0) = -V(x)$

$-V(x) = \sum E_m\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)$

$E_m = \frac{2}{2}\int_0^2 -V(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)dx$

$u(x,t) = x/9\,(4-x^2) + \sum E_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\pi t\right)$

Otro:

$w_{tt} = 3w_{xx}\,,\quad 0 < x < 2\,,\ t > 0$

$w(0,t) = w(2,t) = 0,\ t \geq 0$

$w(x,0) = f(x)$

$w_t(x,0) = 0$

Hallar la solución. Dar $F(x)$ / la sc. pueda expresarse como una suma de 3 términos

$$w(x,t) = \sum_1^{\infty} E_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\pi t\right)$$

E_m coef de Fourier de $f(x)$ en la base $\{\operatorname{sen}(\frac{m\pi}{2}x)\}_{m\in N}$

$E_2 \neq 0,\ E_3 \neq 0,\ E_4 \neq 0,\ E_m = 0,\ m \neq 2,3,4$

$$w(x,t) = E_2 \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\sqrt{3}\pi t) + E_3 \operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi x)\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}3\pi t) + E_4 \operatorname{sen}(2\pi x)\cos(\sqrt{3}2\pi t)$$

$$f(x) = E_2 \operatorname{sen}(\pi x) + E_3 \operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi x) + E_4 \operatorname{sen}(2\pi x)$$

Problema de Dirichlet en un disco

$\Delta u(x,y) = 0 \qquad (x,y) : x^2+y^2 < 1$

$u(x,y) = f(x,y) \qquad x^2+y^2 = 1$

f: dato

$$\tilde{u}(r,\theta) = \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta} = 0\,,\ 0 < r < 1\,,\ -\pi < \theta < \pi$$

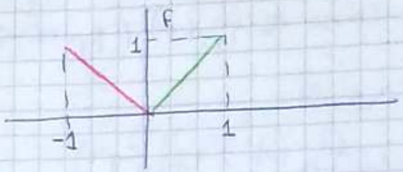
$$\tilde{u}(1,\theta) = \tilde{f}(\theta) \qquad -\pi \leq \theta < \pi$$

6ii) $f(x) = x,\quad 0 < x < 1 \quad (l=1)$

Hallar la SF de a) cosenos b) senos

a) $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n x \pi}{1}\right) \quad 0 < x < 1$

b) $\tilde{S}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{1}x\right),\ 0 < x < 1$



a) S cosenos → ext periódica par de f

$$f_p(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < 1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ f_p(x+2) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\,dx = 2\int_0^1 f_p(x)\,dx$$

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$a_n \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\cos\left(\frac{m\pi}{1}x\right)dx = 2\int_0^1 x\cos(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{m^2\pi^2}(\cos(m\pi) - 1)$$

$$a_m = \frac{2}{m^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } m \text{ par} \\ \frac{-4}{m^2\pi^2} \text{ si } m \text{ impar} \end{cases}$$

$b_m = 0$

$$S_{f_p}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos((2k-1)\pi x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Si $x \in (0,1)$: Es una repr en s de cosenos de f

¿conv de la serie?

1) ¿Conv en c/pto $x \in \mathbb{R}$? (conv puntual)

↓

"mirándolo" la función f_p en $[-1, 1]$

- f_p cont a trozos
- deben existir deriv. lat finitas $\forall x \in (-1,1)$ la serie de Fourier conv a $f_p(x)$ (f_p cont en $(-1,1)$)

En $x=1$; en $x=-1$.

La serie conv a: $\frac{f_p(1^-)+f_p(-1^+)}{2} = 1$

2) Sobre conv unif de la serie en $[-1, 1]$

- f_p cont en $[-1, 1]$
- existen der lat finitas.
- $f_p(-1) = f_p(1)$

La serie F conv unif a f_p en $[-1, 1]$

(Nota: f_p; $x \in \mathbb{R}$ es cont)

La SF conv unif a f_p en $\mathbb{R}$

3) Sobre conv media cuadrática

Cond: $f_p \in \mathcal{L}^2([-1,1])$

$$\int_{-1}^{1} |f_p(x)|^2 dx < \infty \quad ✓ \text{ok}$$

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

par

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en } [0,l] \\ f(-x) & \text{en } [-l,0] \end{cases}$$

impar

$$f_I \begin{cases} f(x) & \text{en } (0,l) \\ -f(-x) & \text{en } [-l,0) \end{cases}$$

Evaluar algunas s. numéricas

En $x=0$

$S_{f_p}(0) = f_p(0)$ (f_p cont en $x=0$)

$$0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)} \cdot 1$$

a0/2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (11-a)$$

Evaluar: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ $\boxed{\text{Parseval}}$

$$\int_{-1}^{1} |f_p|^2 dx = 1^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2k-1)^4 \pi^4}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} + \text{"}$$

$$2/3 - 1/2 = \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

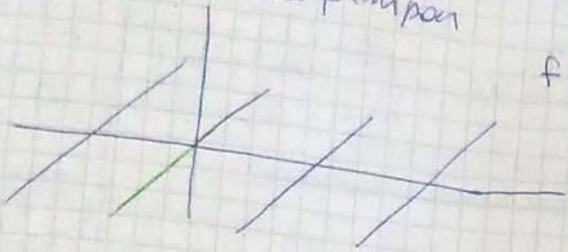
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$f(x) = x$; $x \in (0,1)$

b) DSF de senos

$$\tilde{S}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{1} x\right)$$

Busco ext periódica de f impar



$$f_I(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1,1) \\ f_I(x+2) \end{cases}$$

ext periódica impar de f

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$S_{f_I}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

1) conv puntual en $[-1,1]$
la serie conv a $f_I(x)$;
$x \in (-1,1)$ en $x=1; x=-1$
conv a: $\frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2} = 0$

3) serie F no conv unif en $\mathbb{R}$ a F_I

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **Parseval:** $\int_{-1}^{1} |f_I(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}$

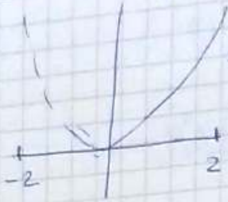
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

16) $x^2 = 4/3 + 16/\pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \quad x \in [0,2]$

$x^2 = 4/3 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n} \quad x \in [0,2]$

S_F de x^2 en $[0,2]$ en conj ⊥ $\{1, \cos(n\pi x), \operatorname{sen}(n\pi x)$
$n \in \mathbb{N}$

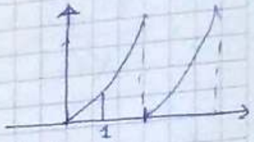
extensión par de la 1°.



$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$a_n = 1/2 \int_{-2}^{2} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{16}{\pi^2 n^2} \quad n = 1,2 \ldots$$

$$a_0 = 8/3$$



En 2° $\boxed{L=1}$ $2L = 2$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_0^2 x^2 \cos\left(\frac{n\pi}{1} x\right) dx = \begin{cases} \frac{8}{3} & n=0 \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

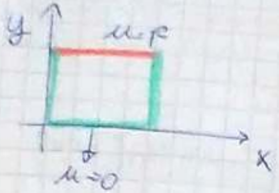
$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^2 x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \frac{-4}{\pi n}$$

x^2 cont a trozos en $[0,2]$, existen las der laterales en $[0,2]$ ⇒ hay conv puntual a $\begin{cases} x^2 \text{ en } (0,2) \\ 2 \text{ en } x=0, x=2 \end{cases}$

Separación de variables en EDP

Ⓟ $u(x,y)$ armónica en $[0,a] \times [0,b]$
$u = 0$ en la frontera, excepto $y = b$: $u(x,b) = f(x)$

$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ $\quad 0 \le y \le b$
$u(0,y) = u(a,y) = 0$ $\quad 0 \le x \le a$
$u(x,0) = 0$
$u(x,b) = f(x)$



Proponemos $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$u''_{xx}(x,y) = X''(x) \cdot Y(y)$

$u''_{yy}(x,y) = X(x) \cdot Y''(y)$

Reemplazando:

$$\frac{X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y)}{X(x)\,Y(y)} = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \rightarrow \text{cte}$$

$X'' - \lambda X = 0$

$Y'' + \lambda Y = 0$

CB $u(0,y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b$

$\Rightarrow X(0) = 0$

$u(a,y) = X(a)\,Y(y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b$

$\Rightarrow X(a) = 0$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & 0 < x < a \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 & 0 < y < b \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

Pol caract $r^2 - \lambda = 0$

$r = \pm\sqrt{\lambda}$

Si $\lambda = 0$: $X(x) = Ax + B$

$X(0) = B$

$X(a) = A \cdot a = 0 \Rightarrow A = 0$

Si $\lambda > 0$

$\lambda = w^2$ $X(x) = A e^{wx} + B e^{-wx} = A(e^{wa} - e^{-wa})$

$A\ 2\,sh(wa) = 0$

$\Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow B = 0$

Si $\lambda < 0$ $r = \pm wi$ $\lambda = -w^2$

$X(x) = \tilde{A} e^{wix} + \tilde{B} e^{-wix} = A \cos(wx) + B\,sen(wx)$

$X(0) = A = 0$

$X(a) = 0 = B\,sen(wa)$

$\Rightarrow wa = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$w = \frac{k\pi}{a}$

$X_k(x) = B_k\,sen\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$

En y: $y'' - w^2 y = 0$

Ec caract $r^2 - w^2 = 0$

$r = \pm w$

$Y(y) = \tilde{C} \cdot e^{wy} + \tilde{D} e^{-wy}$

$Y(y) = C \cdot ch(wy) + D \cdot sh(wy)$

$Y(0) = C = 0$

$Y(y) = D \cdot sh(wy)$

$Y_k(y) = D_k\,sh\left(\frac{k\pi}{a} y\right)$

$u_k(x,y) = X_k(x) \cdot Y_k(y)$

$$\boxed{u_k(x,y) = \hat{B_k}\,sen\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \cdot sh\left(\frac{k\pi}{a} y\right)}$$

↳ verifican: EDP lineal | $k \in \mathbb{N}$
CB homog.

Si $f(x) = 4\,sen\left(\frac{3\pi}{a} x\right)$

$u(x,b) = 4\,sen\left(\frac{3}{a}\pi x\right)$

$u_k(x,b)$

$= \hat{B_k}\,sen\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$

$sh\left(\frac{k\pi}{a} b\right)$

tomo $k = 3$

y $\hat{B_3} = 4/sh\left(\frac{3\pi}{a} b\right)$

Si $f(x) = 4\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right) - 9\,\text{sen}\left(\frac{6\pi x}{a}\right)$

Tomo $k=3$ con $\hat{B}_3$

$k=6$ con $\hat{B}_6$

$$u(x,y) = \hat{B}_3\, u_3(x,y) + \hat{B}_6\, u_6(x,y)$$

$$u(x,b) = \underbrace{\hat{B}_3\, \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{3\pi}{a}b\right)}_{-4} + \underbrace{\hat{B}_6\, \text{sen}\left(\frac{6\pi}{a}x\right) sh\left(\frac{6\pi}{a}b\right)}_{-9}$$

¿Si $f(x)$ es cualquiera?

Superponemos $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$

$$u(x,y) = \sum \hat{B}_k\, \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot sh\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

$$u(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\hat{B}_k\, sh\left(\frac{k\pi}{a}b\right)}_{\alpha_k} \cdot \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$$

$$u(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, \text{sen}\left(\frac{k\pi}{a}x\right) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq a$$

↳ coef de Fourier de la ext impar de f en $[-a,a]$

$$\alpha_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} \underbrace{f_I(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right)}_{par} dx = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx$$

Prob calor en varilla finita

$$\begin{cases} c^2 u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = f(x) & 0<x<L \end{cases}$$

Proponemos $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$u''_{xx} = X'' \cdot T$ $\longrightarrow$ en la EDP: $c^2 X'' T = X T'$

$u'_t = X \cdot T'$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2 T} = \lambda$$

$$T' - c^2 \lambda T = 0$$

$X'' - \lambda X = 0$

$u(0,t) = 0 = X(0)\,T(t)$

$\Rightarrow X(0) = 0$

$u(L,t) = 0 = X(L) \cdot T(t) = 0$

$\Rightarrow X(L) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ X(L) = 0 \\ X(0) = 0 \end{array}\right\} \text{tiene sc no trivial para } \lambda = -\omega^2 < 0$$

$$\omega = \frac{k\pi}{L}$$

$$X_k(x) = B_k\, \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

En T: $T' + c^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T = 0$

$$T_k(t) = D_k\, e^{-\left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$$

$$u_k(x,t) = \hat{B}_k\, \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 t}$$

Para cond. inicial:

Superponemos:

$$u(x,t) = \sum \hat{B}_k\, \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 t}$$

$$u(x,0)=\sum \hat{B_K}\,\text{sen}\left(\frac{K\pi x}{L}\right)=f(x)\qquad 0<x<L$$

↳ coef de F de ext impar de f en $[-L,L]$

$$B_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{K\pi x}{L}\right)dx$$

so aparece
extremos aislados
las derivadas son 0
↓
soluciones son
cosenos

Transformada de Fourier

De series a transformada

$f: [-L,L]\to\mathbb{R}$

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{\frac{in\pi}{L}} \to \text{serie exp de Fourier}$$

↑ so hay conv puntual ponemos igual

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-\frac{inx\pi}{L}}dx$$

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-\frac{int\pi}{L}}dt\; e^{\frac{inx\pi}{L}}$$

Si $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$?

$L\to\infty$

Sea $\omega_n=\frac{n\pi}{L}$, $\omega_{n+1}-\omega_n=(n+1)\frac{\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L}$

$$\Delta\omega_n=\pi/L$$

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overset{\Delta\omega_n}{\frac{1}{2L}\frac{\pi}{\pi}}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-i\omega_n t}dt\; e^{i\omega_n x}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-i\omega_n t}dt\cdot e^{i\omega_n x}\cdot\Delta\omega_n$$

con $L\to\infty$, $\Delta\omega_n\to d\omega$

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt}\;e^{i\omega x}d\omega$$

Transf de Fourier de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

$$f(x)\longrightarrow\boxed{\mathcal{F}}\longrightarrow\hat{f}(\omega)\ \text{ o }\ \mathcal{F}(f)(\omega)$$

f(x) operador

$$\mathcal{F}(f)(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt \quad \text{existe siempre}$$

que la integral converge.

Condición suficiente para existencia de $\hat{f}(\omega)$:
f sea absolutamente integrable en todo $\mathbb{R}$.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty\right)$$

Espacio $L^1(\mathbb{R})$: func abs integr en $\mathbb{R}$

$$L^1(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}}\ /\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty\right\}$$

Ejemplos

$$f(t)=e^{-|t|a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-a|t|}|\,dt=2\int_0^{\infty}e^{-at}dt=2\left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{2}{a}<\infty\ \Rightarrow f\in L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}\cdot e^{-i\omega t}dt$$

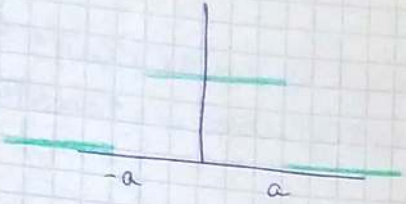
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{t(a-i\omega)}dt+\int_0^{\infty}e^{-t(a+i\omega)}dt$$

$$=\left.\frac{e^{t(a-i\omega)}}{a-i\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-t(a+i\omega)}}{-(a+i\omega)}\right|_{\infty}^{0}=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Ejemplo

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$



$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{i\omega t} dt$$

$$= \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-a}^{a} = \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega}$$

$$= \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i\omega} \cdot 2 = 2\,\frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega} \quad \omega \neq 0$$

$$\hat{g}(0) = \int_{-a}^{a} 1\, dt = 2a \qquad \hat{g}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega} & \omega \neq 0 \\ 2a & \omega = 0 \end{cases}$$

TF para $f \notin L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Propiedades de TF

① Lineal $\mathcal{F}(f + cg)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) + c\,\mathcal{F}(g)(\omega)$

② Desplazamiento en t

$$g(t) = f(t - t_0)$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega(u+t_0)} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u} \cdot e^{-i\omega t_0} du = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du$$

$$= e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$$

③ Desplazamiento en frecuencia

$$\hat{f}(\omega - \omega_0) = \hat{g}(\omega)$$

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\, e^{i\omega_0 t}}_{g(t)} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$\hookrightarrow g(t) = f(t)\, e^{i\omega_0 t}$$

③' $$g_1(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) = f(t)\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2} f(t)\, e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t)\, e^{-i\omega_0 t}$$

$$\hat{g_1}(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega + \omega_0)$$

$g_2(t) = f(t)\,\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} f(t)\, e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i} f(t)\, e^{-i\omega_0 t}$

$\hat{g_2}(\omega) = \frac{1}{2i} \hat{f}(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2i} \hat{f}(\omega+\omega_0)$

④ Escala $g(t) = f(at)$, $a \in \mathbb{R}$

$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\, e^{-i\omega t}\, dt$

$u = at$, $du = a\,dt$

si $a > 0$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

si $a < 0$ $\hat{g}(\omega) = -\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Resumen $\hat{f}_\omega = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Proponemos $\tilde{u}(r,\theta) = R(r) \cdot T(\theta)$

$\tilde{u}_r = R'.T$ $\tilde{u}''_{\theta\theta} = RT''$

$\tilde{u}''_{rr} = R''.T$

Reemplazando en EDP.

$R''T + 1/r\, R'T + 1/r^2\, T''R = 0$

$r^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right) = -\frac{T''}{T} = \lambda$

Resulta

$T'' + \lambda T = 0$

$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$

$T(\pi) = T(-\pi)$

$T'(\pi) = T'(-\pi)$

Solo soluciones no triviales cuando $\lambda < 0$ $\lambda = n^2, n \in \mathbb{N}_0$

$T_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n\,\text{sen}(n\theta)$

$r^2 R'' + rR' - m^2 R = 0$

Prop.

$R(r) = r^\alpha$

$R'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$

$R''(r) = \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2}$

Reemplazando: $r^2 \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha} - n^2 r^\alpha = 0$

$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 = 0$

$\alpha^2 - \alpha + \alpha - n^2 = 0$

$\hookrightarrow \boxed{\alpha = \pm n}$

Si $n \neq 0$ $R(r) = c_n r^m + d_n r^{-m}$

Si $m = 0$ la ec. es

$r^2 R'' + rR' = 0$ $R(r) = c_0 + d_0 \ln(r)$

Como buscamos sol. acotada en el disco, $d_m = 0$, $d_0 = 0$

Queda $R(r) = c_n r^m$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

$\tilde{u}_n(r,\theta) = r^m (A_m \cos(m\theta) + B_m\,\text{sen}(m\theta))$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\tilde{u}(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m (Am\cos(m\theta) + Bm\,sen(m\theta))$$

$$\tilde{u}(1,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} Am\cos(m\theta) + Bm\,sen(m\theta) = f(\theta) \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$= A_0 + \sum_{n=2}^{\infty} Am\cos(m\theta) + Bm\,sen(m\theta) = f(\theta)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$$

$$Am = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta \qquad Bm = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(m\theta)\,d\theta$$

otro caso con $f(\theta)$

$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$

$\cos^2(x) - sen^2(x) = \cos(2x)$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$sen^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$f(\theta) = \cos^2(6\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(12\theta)$$

Transformadas de Fourier $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Ejemplos:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t|<a \\ 0 & si\ |t|\geq a \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{2sen\,a\omega}{\omega}$$

$g(t) = e^{-|t|a}$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-ta} & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-ta}e^{-i\omega} = \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

* Si f es par $\Rightarrow \hat{f}$ es real

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen(\omega t)dt$$

* Si f es impar real $\to \hat{f}$ es imag. pura.

Si f es par real

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$$\hat{f}(-\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(-\omega t)dt = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f} \text{ es par}$$

Si f es impar

$$\hat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,sen(\omega t)\,dt = -2i\int_0^{\infty} f(t)sen(\omega t)dt$$

además $\hat{f}(-\omega) = -\hat{f}(\omega)$

$\Rightarrow \hat{f}$ es impar.

---

① Sea $g(x,y)$ dif en $\mathbb{R}^2$ con $f(z) = \rho(x,y) + i\rho(x,y)$

Cómo debe ser $g(x,y)$ para que f sea entera.

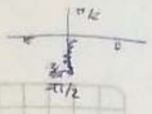
$u = \rho(x,y) \quad v = g(x,y) \quad$. u y v dif en $\mathbb{R}^2$

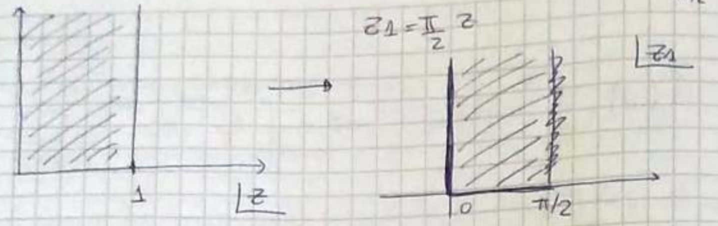
$$\left.\begin{aligned} g_x(x,y) &= g_y(x,y) \\ -g_y(x,y) &= g_x(x,y) \end{aligned}\right\} \to g_y(x,y) = -g_y(x,y)$$

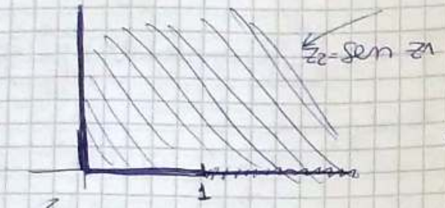
y para que esto ocurra debe ser 0

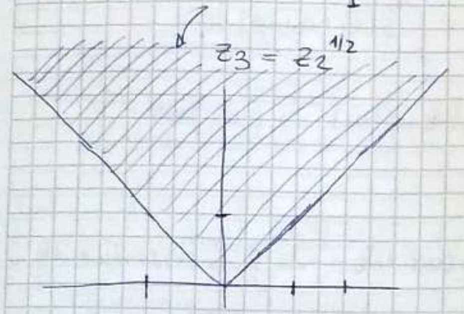
$\Rightarrow$ las únicas funciones que cumplen son $\rho(x,y) = cte$.

②









$$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{sen}(i) = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{i}{2}\left(e^{-1} - e^{1}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{1} - e^{-1}\right)$$

$$\text{sen}(i + \pi/2) = \frac{e^{i(i+\pi/2)} - e^{-i(i+\pi/2)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1+i\pi/2} - e^{1-i\pi/2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}(\cos(\pi/2) + i\,\text{sen}\,\pi/2) - e(\cos(-\pi/2) + i\,\text{sen}(-\pi/2))}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}\cancel{i} + e\cancel{i}}{2i}$$

$$= \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$1^{1/2} = 1e^{i\frac{\arg(1)}{2}} = 1e^{i\frac{3/2\pi}{2}}$$

$$= 1\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$= -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$$

$$i^{1/2} = 1e^{i\frac{\arg(i)}{2}} = 1e^{\frac{i\pi/2}{2}}$$

$$= 1\left[\cos(\pi/4) + i\,\text{sen}(\pi/4)\right]$$

$$= \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$$

$$\frac{\cancel{z}}{|z|^2} = \frac{\cancel{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

③ $\frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\text{Log}(w) = \ln\left(\overbrace{\sqrt{\text{Re}(w)^2 + \text{Im}(w)^2}}^{|w|}\right) \underbrace{+ i\,\text{arctg}\left(\frac{\text{Im}(w)}{\text{Re}(w)}\right)}_{\text{Arg}(w)}$$

$$\text{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\text{Im}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$-\pi < \text{Arg}\, w \leq \pi$

si m = 1 $\text{arctg}\left(\frac{y-1}{x}\right)$

$\Rightarrow \text{Log}(x + i(y-1)) = \ln\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right) + i\,\text{arctg}\left(\frac{y-1}{x}\right)$

Si $w = x + i(y-1)$ es armónica $\Rightarrow$ Log(w) es armónico por ser compos de func. armónicas.

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 1 = 1 = v_y \\ u_y = 0 = -v_x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ f es entera CR se cumplen en ℂ

o u y v dif x ser polinomios

$\Rightarrow$ arctg(w) es armónica en los valores de x, y /

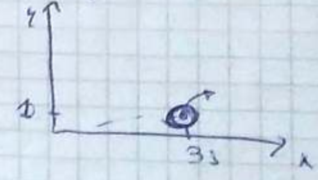
$-\pi < \arg \text{tg}(w) < \pi$

$$v(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2}$$

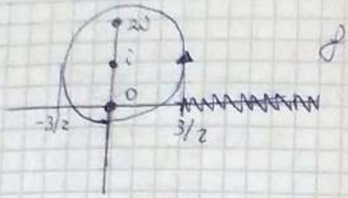
u(x,y) es armónica en $B(\cancel{33}, 2)$ por ejemplo.

↓

(33, 1)



④



$$g(z) = \frac{\log(2z-3)}{z(iz+2)}$$

$$= \frac{\log(2z-3)}{z\cdot i\,(z+2/i)} = \frac{\log(2z-3)}{iz(z-2i)}$$

el logaritmo tiene problemas donde

$$2z-3=0$$

$$\boxed{z = 3/2}$$

$\Rightarrow$ elijo $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$

de manera que no afecte a la curva.

Por TR:

$$\oint_{C^+} \frac{\log(2z-3)}{z(iz+2)}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\forall \\ \in RI(C)}} \operatorname{Res}(\;)$$

$\Rightarrow$ busco los residuos de $z=0$ y $z=2i$

$m(z) = \log_{\alpha=0}(2z-3)$

$n(z) = z(iz+2)$

$m(0) = \log_{\alpha=0}(-3) \neq 0 \rightarrow 0$ no es cero de $m(z)$

$n(0) = 0$

$\rightarrow z=0$ es polo simple de $g(z)$

$n'(z) = i2z+2 \Rightarrow n'(0) \neq 0 \rightarrow$ 0 es cero de orden 1 de $n(z)$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\log_{\alpha=0}(2z-3)}{z(iz+2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\overset{\ln(3)+i\pi}{\log_{\alpha=0}(2z-3)}}{\underset{2}{iz+2}} = \frac{\ln(3)+i\pi}{2}$$

$$\log_{\alpha=0}(2\cdot 0-3) = \ln|-3| + i\arg(-3) = \ln(3) + i\pi$$

Calcular $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)$

Sabemos que $\mathcal{F}\left(e^{-|t|a}\right)(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}$

Por teo inv

si $f(t) = e^{-|t|a}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+w^2} e^{iwt}\,dw$$

$$\frac{\pi}{a} e^{-|t|a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+w^2} e^{iwt}\,dw$$

$f(t)$	$\hat{f}(w)$
$\begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < a \\ 0 & \lvert t\rvert > a \end{cases}$	$\frac{2\operatorname{sen}(aw)}{w}$
$e^{-\lvert t\rvert a}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$
$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{a+iw}$
e^{-at^2}	$e^{-\frac{w^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a\lvert w\rvert}$

Propiedades

$f(t) \rightsquigarrow \hat{f}(w)$

$e^{iat} f(t) \longrightarrow \hat{f}(w-a)$

$f(t-a) \rightsquigarrow e^{-iwa}\hat{f}(w)$

$f^{(n)}(t) \rightsquigarrow (iw)^n \hat{f}(w)$

$t^n f(t) \rightsquigarrow i^n \hat{f}^{(n)}(w)$

③ a) $\mathcal{F}\left(e^{-a(t-b)^2}\right)(\omega)=e^{-i\omega b},\ \hat{f}(\omega)=e^{-i\omega b}\cdot e^{-\omega^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$g(t)=e^{-a(t-b)^2}=f(t-b)$

$f(t)=e^{-at^2}$

$\mathcal{F}\left(e^{-a(t-b)^2}\right)(\omega)=\hat{g}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}-i\omega b}$

$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{(\omega+2abi)^2}{4a}}\cdot e^{ab^2}$

b) $g(t)=t\,e^{-at^2}=t\,f(t)$

con $f(t)=e^{-at^2}$

$\hat{g}(\omega)=i\hat{f}'(\omega)=i\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\right)'=i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{-2\omega}{4a}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

c) $g(t)=\cos(ct)\cdot e^{-t^2}=\left(\frac{e^{ict}+e^{-ict}}{2}\right)e^{-t^2}$

$=\frac{1}{2}e^{ict}e^{-t^2}+\frac{1}{2}e^{-ict}e^{-t^2}$

$=\frac{1}{2}e^{ict}f(t)+\frac{1}{2}e^{-ict}f(t)$ con $f(t)=e^{-t^2}$

Luego:

$\hat{g}(\omega)=\frac{1}{2}\hat{f}(\omega-c)+\frac{1}{2}\hat{f}(\omega+c)$

$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(\omega-c)^2}{4}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(\omega+c)^2}{4}}$

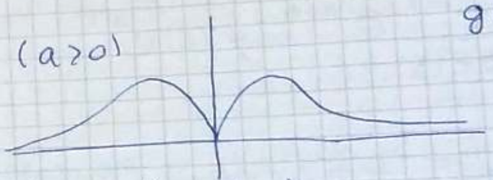
2- e) $f(t)=t\,e^{-a|t|}$

"conocido" $g(t)\,e^{-a|t|}\rightarrow\hat{g}(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$

$f(t)=t\,g(t)\Rightarrow\hat{f}(\omega)=i\,\hat{g}'(\omega)$

e) $f(t)=|t|\,e^{-a|t|}$

$g(t)=t\,e^{-at}\cdot H(t)$



$f(t)=g(t)+g(-t)$

$\hat{f}(\omega)=\hat{g}(\omega)+\frac{1}{|-1|}\hat{g}(-\omega)$

$\hat{f}(\omega)=\hat{g}(\omega)+\hat{g}(-\omega)$

conocido $h(t)=e^{-at}H(t)$ $\hat{h}(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}$

$\hat{g}(\omega)=i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+i\omega}\right)=i\left(\frac{-i}{(a+i\omega)^2}\right)=\frac{1}{(a+i\omega)^2}$

$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{(a+i\omega)^2}+\frac{1}{(a-i\omega)^2}$ $\hat{f}(\omega)=\frac{(a-i\omega)^2+(a+i\omega)^2}{(a^2+\omega^2)^2}$

$=\frac{2a^2-2\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$

$H(t)= e\; 1\{t>0\}$

③ c

Parecido a j

$t^2-4t+13$
$=t^2-4t+4+9$
$=(t-2)^2+9$

$$\varphi(t) = \frac{5}{t^2-4t+13} = \frac{5}{(t-2)^2+9}$$

$$\mathcal{F}\{\varphi(t)\} = 5\,\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t-2)^2+9}\right\} = 5e^{-i2\omega}\,\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+9}\right\}$$

$$= 5e^{-i2\omega}\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$$

j) $$f(t) = \frac{5}{t^2-4t+13}e^{3it} = \varphi(t)e^{3it}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{5e^{3it}}{(t-2)^2+9}\right\} = 5\cdot\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t-2)^2+9}\right\}(\omega-3)$$

$$= 5e^{i2(\omega-3)}\cdot\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega-3|}$$

l) $$f(t) = (t-3)e^{-4t}H(t-3)$$

$$f(t) = (t-3)e^{-4(t-3)}\cdot e^{-12}\cdot H(t-3)$$

$$g(t) = te^{-4t}\cdot H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)^2}$$

$$f(t) = g(t-3)e^{-12}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)e^{-i3\omega}\cdot e^{-12}$$

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(a\omega)\cos(x\omega)}{\omega}\,d\omega$

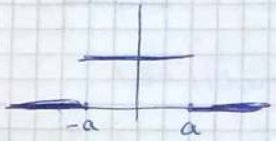
converge? $\varphi(\omega) = \text{sen}(a\omega)\cos(x\omega)$

$$\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi(\omega)d\omega\right| \leq M \quad y \quad \alpha(\omega) = \frac{1}{\omega} \text{ si } \omega>0, \text{ decreciente}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\alpha(\omega) = 0$$

$\Rightarrow$ Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty}\cdots d\omega$ (C), similarmente $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\cdots d\omega$ (C)

Sabemos que si $f(t) = \begin{cases} 1 & |t|<a \\ 0 & |t|>a \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}(a\omega)}{\omega}$



Además por teo inv

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}(\cos(\omega t)+i\,\text{sen}(\omega t))d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega + \underbrace{\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(a\omega)\,\text{sen}(\omega t)}{\omega}d\omega}$$

0 por integrando impar

Luego $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(a\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega = \pi\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t<-a \text{ o } t>a \\ \pi & \text{si } -a<t<a \\ \pi/2 & t=a \text{ o } t=-a \end{cases}$$

De donde $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}d\omega = \underset{t=0}{\underset{\downarrow}{\pi}}$$

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega\,\text{sen}(\omega x)}{1+\omega^2}\, d\omega$

El denominador tiende a cero con $n \to \infty$.

$\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}$ → acotada entre $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{\omega}{1+\omega^2}\,\text{sen}(\omega x)$ acot $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Son integrables (por Dirichlet)

Sabemos que si $f(t) = e^{-\omega t} H(t) \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{a+i\omega}$

y por teo de inv.

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega}\left(\cos(\omega t) + i\,\text{sen}(\omega t)\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}\left(\cos \omega t + i\,\text{sen}\,\omega t\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos\omega t + \omega\,\text{sen}\,\omega t}{a^2+\omega^2}\, d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\,\text{sen}(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{1+\omega^2}\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t) + \omega\,\text{sen}(\omega t)}{1+\omega^2}\, d\omega = 2\pi\left(\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \pi & t=0 \\ 2\pi e^{-t} & t>0 \end{cases}$$

Parecido al 8) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2+2\omega+5} = \frac{1}{(\omega+1)^2+4}$$

$$f(t) = e^{-it}\,\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2+4}\right\} = e^{-t}\cdot\frac{1}{4}e^{-2|t|}$$

parecido al 8.a)

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{6e^{4i\omega}}{9+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{9+\omega^2}\right\} = \frac{1}{2\cdot 3} e^{-3|t|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6e^{4i\omega}}{9+\omega^2}\right\} = \frac{1\cdot 6}{6} e^{-3|t+4|}$$

8-e) $F(\omega) = e^{-\omega^2/9}\,\text{sen}(8\omega)$

$$F(\omega) = 1/2i\left(e^{-\omega^2/9}e^{i8\omega} - e^{-\omega^2/9}e^{-i2\omega}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\omega^2/9}\right\} = \underbrace{\sqrt{\frac{9}{4\pi}}\, e^{-9/4t^2}}_{g(t)} \qquad \begin{matrix} 4a = 9 \\ \Downarrow \\ a = 9/4 \end{matrix}$$

$$F(\omega) \to f(t) = \frac{1}{2i}\left(g(t-8) - g(t+8)\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{9}{4\pi}}\left(e^{-9/4(t-8)^2} - e^{-9/4(t+8)^2}\right)$$

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}$$ tapaditos

1º-c) $\hat{F}(\omega) = \dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)} = \dfrac{1}{1+i\omega} - \dfrac{1}{2+i\omega}$

$\hookrightarrow f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})H(t)$

Convolución

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f*g)(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \\ \end{cases}$

Propiedades • lineal $(f+g)*h = f*h + ~~g~~ * gh$

$(\lambda f)*g = \lambda(f*g)$

simétrica $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$

$u = x-t$
$t = x-u$
$du = -dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)\, du = (g*f)(x)$

• asociativa $(f*g)*h = f*(g*h)$

Proposición Si $f \in L^1$ y $g \in L^1 \to f*g \in L^1$

Dem: $f \in L^1$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

$g \in L^1$: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$

Sea $h(x) = (f*g)(x)$ ver que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx < \infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \right| dx \leq$ →

$\to \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\, dt\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, g(u)\, dt\, du$

pc t, $u = x-t$
$du = dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du}_{\|g\|_1} dt = \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$

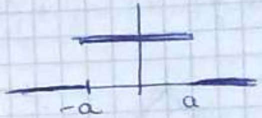
$= \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty$

Teorema de convolución

Si f y g son L^1 y $L^2 \Rightarrow \widehat{f*g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

Ejemplo:

Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$



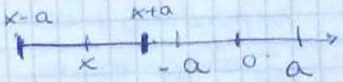
$g(t) = f(t)$

Calcular $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$

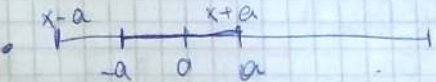
$= \int_{-a}^{a} g(x-t)\, dt = \int_{x-a}^{x+a} g(u)\, du$

$u = x-t$
$du = -dt$

• Si $x+a < -a \Leftrightarrow x < -2a$



$\int_{x-a}^{x+a} g(u)\, du = 0$

• 

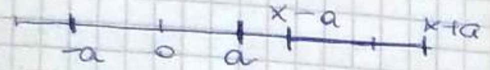
Si $-a < x+a < a$
$\Updownarrow$
$-2a < x < 0$

$$\int_{x-a}^{x+a} f(u)\,du = \int_{-a}^{x+a} 1\,du = x+2a$$

- Si $x+a>a$, $-a < x-a < a$

$$\int_{x-a}^{x+a} f(u)\,du = \int_{x-a}^{a} 1\,du = 2a-x$$

- Si $x-a>a$

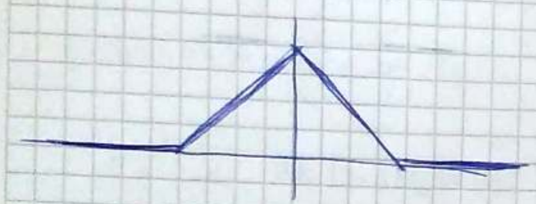


$$\int_{x-a}^{x+a} f(u)\,du = 0$$

fa: el área debajo de la curva de f

$f_a * f_b$ = área de la conv

$$\Rightarrow (f*f)(x) = (f*f)(x) = \begin{cases} x+2a & -2a<x<0 \\ 2a-x & 0<x<+2a \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



$$\widehat{f*g}(\omega) = \hat f(\omega)\cdot\hat f(\omega) = \hat f(\omega)^2$$
$$= \left(\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}\right)^2 = \frac{4\sin^2(a\omega)}{\omega^2}$$

Aplicación de TF en EDP

Sea $u'_t(x,t) = k\,u''_{xx}(x,t) \quad -\infty < x < \infty ,\ t>0$

$u(x,0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty$

Supongamos que u, u'_t, u'_{xx} tienen TF.

Transformamos $\hat u(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$

$$\widehat{u''_{xx}}(\omega,t) = (i\omega)^2\,\hat u(\omega,t)$$

$$\widehat{u'_t}(\omega,t) = \int^{\infty} u'_t(x,t)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \frac{d}{dt}\int^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\hat u(\omega,t)$$

En la ED:

$$\frac{d}{dt}\hat u(\omega t) = k(-\omega^2)\hat u(\omega,t)$$
$$\hat u'_t(\omega,t) = -k\omega^2\hat u(\omega,t)$$

Solución: $\hat u(\omega,t) = A(\omega)e^{-k\omega^2 t}$

Con $t=0$,

$$\hat u(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \hat f(\omega)$$

Luego: $\hat u(\omega,0) = A(\omega) = \hat f(\omega)$

$$\hat u(\omega,t) = \hat f(\omega)\cdot e^{-k\omega^2 t}$$

Antitransformada

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat u)(x,t) \overset{\text{teo de inv}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat u(\omega,t)e^{i\omega x}\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega$$

Otra forma:

Como $e^{-\omega^2 kt}$ es la trans F de $\sqrt{\frac{1}{4kt\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4kt}}$

Por teo conv

$$u(x,t) = (f*h)(x,t) ,\ \text{siendo } h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4kt\pi}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cdot h(x-z,t)\,dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{4kt}}\,dz$$

En part si $f(x)=e^{-x^2} \Rightarrow \hat{f}(w)=e^{-w^2/4}\sqrt{\pi}$

$$\hat{u}(w,t)=e^{\frac{-w^2}{4}}\sqrt{\pi}\,e^{-kw^2t}=e^{-w^2\underbrace{\left(\frac{1}{4}+kt\right)}_{1/4a}}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{4a}=1/4+kt=\frac{1+4kt}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{1+4kt}$$

Entonces

$$u(x,t)=\sqrt{a}\,e^{-x^2\cdot a}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4kt}}\circ e^{\frac{-x^2}{1+4kt}}$$

$\boxed{\text{Ecuación onda}}$

$$u''_{tt}(x,t)=e^2u''_{xx}(x,t) \qquad -\infty<x<\infty,\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u'_t(x,0)=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

Sea $\hat{u}(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-iwx}dx$

$$\hat{u}''_{tt}(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u''_{tt}(x,t)e^{-iwx}dx$$

$$(iw)^2\hat{u}(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u''_{xx}(x,t)e^{-iwx}dX$$

Reemplazando en ED

$$\hat{u}''_{tt}(w,t)=-(cw)^2\hat{u}(w,t)$$

$$\hat{u}(w,t)=A(w)\cos(cwt)+B(w)\operatorname{sen}(cwt)$$

CI:

$$\hat{u}'_t(w,0)=d/dt\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-iwx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{u'_t(x,0)}_{0}e^{-iwx}dx=0$$

derivando $\hat{u}$: $\hat{u}_t(w,t)=-cwA(w)\operatorname{sen}(cwt)$
$+cwB(w)\cos(cwt)$

$$\hat{u}'_t(w,0)=0+cwB(w) \Rightarrow B(w)=0$$

Queda: $\hat{u}(w,t)=A(w)\circ\cos(cwt)$

En $t=0$; $\hat{u}(w,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{u(x,0)}_{F}e^{-iwx}dx=\hat{F}(w)=A(w)$

$$\hat{u}(w,t)=\hat{f}(w)\circ\cos(cwt)$$

Antitransformada

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(x,t)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{F}(w)e^{icwt}+\hat{F}(w)e^{-icwt}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(F(x+ct)+F(x-ct)\right)$$

$\boxed{\text{Dominio de TF de }-\infty\text{ a }\infty}$

Transformada seno - Transformada coseno

Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_c(f)(w)=\int_0^{\infty}f(x)\cos(wx)dx$$

$$\mathcal{F}_s(f)(w)=\int_0^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(wx)dx$$

Observación:

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, TF $\mathcal{F}(f)(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos(wx)+i\operatorname{sen}(wx)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(wx)dx+i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(wx)dx$$

Si f es par, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx = 2\,\mathcal{F}_c(f)(\omega)$$

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f impar

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = -i2\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx = -2i\,\mathcal{F}_s(f)(\omega)$$

Props: FS y FC de la derivada

Sea $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, abs int en $(0,\infty)$

y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_c(f')(\omega) = \int_0^{\infty} f'(x)\cdot\cos(\omega x)\,dx$$

$$= f(x)\cos(\omega x)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x)(-\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$$

$$= -f(0^+) + \omega\,\mathcal{F}_s(f)(\omega)$$

$$\therefore\ \mathcal{F}_c(f')(\omega) = \omega\,\mathcal{F}_s(f)(\omega) - f(0^+)$$

Por otro lado $\mathcal{F}_s(f')(\omega) = \int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$

$$= f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x)\,\omega\cos(\omega x)\,dx$$

$$= -\omega\,\mathcal{F}_c(f)(\omega)$$

$$\therefore\ \mathcal{F}_s(f')(\omega) = -\omega\,\mathcal{F}_c(f)(\omega)$$

Más aún:

$$\mathcal{F}_c(f'')(\omega) = \omega\,\mathcal{F}_s(f')(\omega) - f'(0^+)$$

$$= \omega(-\omega\,\mathcal{F}_c(f)(\omega)) - f'(0^+) = -\omega^2\,\mathcal{F}_c(f)(\omega) - f(0^+)$$

$$\mathcal{F}_s(f'')(\omega) = -\omega\,\mathcal{F}_c(f')(\omega) = -\omega[\omega\,\mathcal{F}_s(f)(\omega) - f(0^+)]$$

$$= -\omega^2\,\mathcal{F}_s(f)(\omega) + f(0^+)\omega$$

23) Calor varilla semiinfinita

$u'_t = u''_{xx}(x,t)$ $\quad 0 < x < \infty,\ t > 0$

$u(0,t) = 0$ $\quad t > 0$

$u(x,0) = f(x)$

Aplicamos la FS: $\mathcal{F}_s(u)(\omega) = \hat{u}(\omega,t)$

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -\omega^2\,\hat{u}(\omega,t)$$

Sol $\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\,e^{-\omega^2 t}$

En $t=0$ $\hat{u}(\omega,0) = \int_0^{\infty} \underbrace{u(x,0)}_{f}\,\mathrm{sen}\,\omega x\,dx = \mathcal{F}_s(f)(\omega)$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\,e^{-\omega^2 t}$$

$\mathcal{F}_s^{-1}$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{u}(\omega,t)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{-\omega^2 t}\,\mathrm{sen}(\omega x)\,d\omega$$